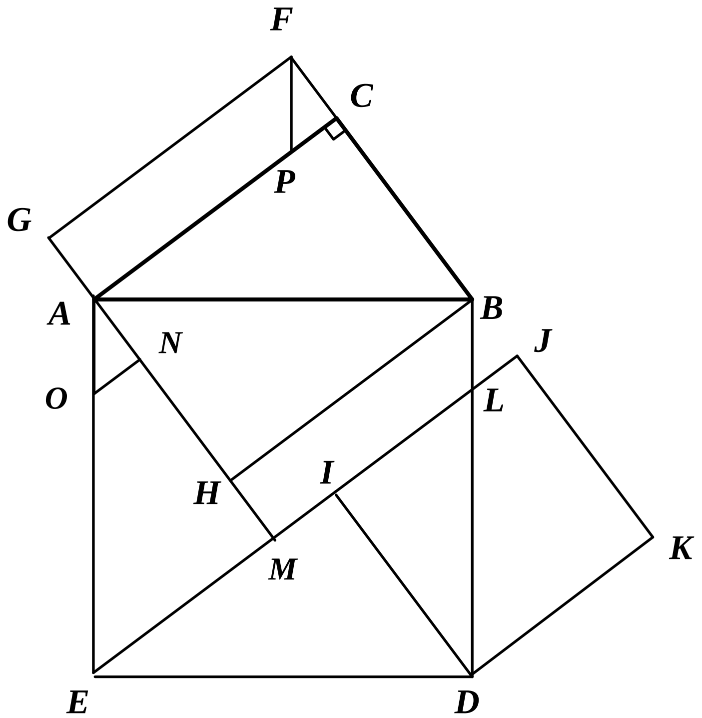
勾股定理證明-華蘅芳 14

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為邊，向外作正方形 $ABDE$ 。
2. 在 $\overline{BC}$ 延伸線上取 F ，使得 $\overline{BF}=\overline{CA}$ ，再以 $\overline{BF}$ 為邊向內作正方形 $BFGH$ 。
3. 過 E 向內作 $\overline{AC}$ 的平行線 $\overline{EI}$ ，使得 $\overline{AC}=\overline{EI}$ ；連 $\overline{ID}$ ，然後以 $\overline{DI}$ 為邊作正方形 $DIJK$ ，其中 $\overline{IJ}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 L 。
4. 延伸 $\overline{AH}$ 交 $\overline{EI}$ 於 M 。
5. 最後在 $\overline{AM}$ 上取一點 N ，使得 $\overline{AN}=\overline{FC}$ ，再過 N 作 $\overline{AM}$ 的垂直線，交 $\overline{AE}$ 於 O 。並在 $\overline{CA}$ 上取一點 P ，使得 $\overline{CP}=\overline{NO}$ ，連 $\overline{PF}$ 。



【求證過程】

以上輔助圖中，大正方形被輔助線切割成六塊拼片，我們不難證明這六塊拼片與兩個小正方形內的拼片對應全等，因此可以以這六塊拼片拼得兩個小正方形。再利用面積等式的推導，即可輕易得到畢氏定理的關係式。

1. 證明 $\Delta ABC, \Delta BAH, \Delta AEM, \Delta EDI$ 皆為全等的直角三角形：

   其中我們先證明 $\Delta ABC \cong \Delta BAH$ ，是因為

   $$\overline{AB}=\overline{BA}(\because \text{共用邊}),$$

   而且

   $$\angle ABC = 90^\circ - \angle ABH = \angle BAH,$$

   以及

   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle BHA,$$

   所以可以推得

   $$\Delta ABC \cong \Delta BAH \ (\text{AAS 全等})；$$

再看$\Delta ABC, \Delta AEM$ ，不難證明它們的全等：
因為

$$\overline{AB} = \overline{AE} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle BAH (\because \Delta ABC \cong \Delta BAH) \\ &= \angle MAE,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\angle AME = \angle MAC &(\because \text{平行線的內錯角}) \\ &= \angle HAB + \angle BAC \\ &= \angle CBA + \angle BAC (\because \Delta ABC \cong \Delta BAH) \\ &= 90^\circ \\ &= \angle ACB,\end{aligned}$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta AEM \ \ (\text{AAS 全等})；$$

接著看$\Delta ABC, \Delta EDI$ ：
因為

$$\overline{AB} = \overline{ED} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle AEM (\because \Delta ABC \cong \Delta AEM) \\ &= \angle IED,\end{aligned}$$

以及

$$\overline{AC} = \overline{EI},$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta EDI \ \ (\text{SAS 全等})；$$

因此我們完全證明

$$\Delta ABC \cong \Delta BAH \cong \Delta AEM \cong \Delta EDI.$$

2. 不難發現$\Delta FCP, \Delta ANO$亦為全等的直角三角形, 以下我們給出證明：
因為

$$\overline{FC} = \overline{AN},$$

而且

$$\overline{ON} = \overline{PC},$$

以及

$$\angle ANO = \angle FCP = 90^\circ,$$

所以可以推得

$$\Delta FCP \cong \Delta ANO \ (\text{SAS 全等}).$$

3. 再來我們以五個條件證明四邊形$ONME \cong$四邊形$LJKD$：

因為

$$\overline{EM} = \overline{ID} (\because \Delta AEM \cong \Delta EDI),$$

而且

$$\begin{aligned} \overline{NM} &= \overline{AM} - \overline{AN} \\ &= \overline{BH} - \overline{FC} (\because \Delta AEM \cong \Delta BAH) \\ &= \overline{FB} - \overline{FC} (\because \text{正方形的邊}) \\ &= \overline{BC} \\ &= \overline{ID} (\because \Delta ABC \cong \Delta EDI) \\ &= \overline{JK} (\because \text{正方形的邊}), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \angle OEM &= \angle IDE (\because \Delta AEM \cong \Delta EDI) \\ &= 90^\circ - \angle IDL \\ &= \angle LDK, \end{aligned}$$

和

$$\angle EMN = \angle MNO = 90^\circ = \angle DKJ = \angle KJL,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}ONME \cong \text{四邊形}LJKD \text{ (ASASA 全等)}.$$

4. 最後一塊拼片要考慮四邊形$AGFP$,四邊形$MHBL$的全等, 同樣地我們找五個條件給出證明：

因為

$$\overline{GF} = \overline{HB} (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned} \overline{GA} &= \overline{HG} - \overline{HA} \\ &= \overline{BH} - \overline{HA} (\because \text{正方形的邊}) \\ &= \overline{AM} - \overline{HA} (\because \Delta AEM \cong \Delta BAH) \\ &= \overline{HM}, \end{aligned}$$

以及以下的三個角對應相等，

$$\angle PAG = \angle AGF = 90^\circ = \angle LMH = \angle MHB,$$

和

$$\begin{aligned} \angle GFP &= 90^\circ - \angle PFC \\ &= 90^\circ - \angle OAN (\because \Delta PFC \cong \Delta OAN) \\ &= 90^\circ - \angle EAM \\ &= 90^\circ - \angle ABH (\because \Delta AEM \cong \Delta BAH) \\ &= \angle HBL, \end{aligned}$$

所以可以推得

$$\text{四邊形} AGFP \cong \text{四邊形} MHBL \ (\text{ASASA 全等}).$$

5. 綜合以上拼片對應全等的證明，以下我們從面積等式中推導：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta AON + ONME + \Delta EDI + \Delta BAH + MHBL + \Delta LID \\ &= \Delta FPC + LJKD + \Delta ABC + \Delta BAH + AGFP + \Delta LID \\ &= (\Delta FPC + AGFP + \Delta ABC + \Delta BAH) + (LJKD + \Delta LID) \\ &= \square BFGH + \square DIJK,\end{aligned}$$

即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。
   另外在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。