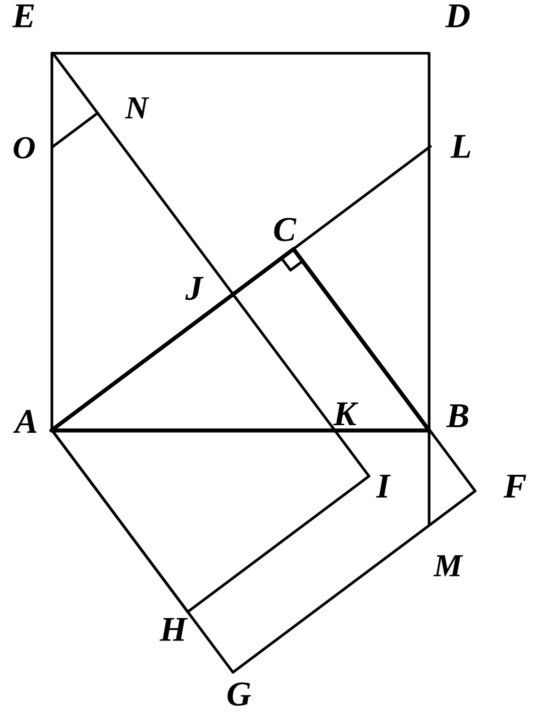
# 勾股定理證明-華蘅芳 12

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 $ABC$ 的 $\overline{AB}$ 為邊，向內作正方形 $ABDE$；再以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作正方形 $ACFG$；接著取一點 $H$ 於 $\overline{AG}$ 上，使 $\overline{AH}=\overline{BC}$，再以 $\overline{AH}$ 為邊向內作正方形 $AHIJ$。其中 $\overline{JI}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 $K$。連 $\overline{EJ}$。
2. 延伸 $\overline{AC}$ 交 $\overline{BD}$ 於 $L$；並延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{FG}$ 於 $M$。
3. 最後在 $\overline{EJ}$ 上取一點 $N$，使得 $\overline{EN}=\overline{BF}$，再過 $N$ 作 $\overline{EJ}$ 的垂直線，交 $\overline{AE}$ 於 $O$。




【求證過程】

以上輔助圖中，大正方形被輔助線切割成五塊拼片，不難證明這五塊拼片與兩個小正方形內的拼片對應全等，因此可以以這五塊拼片拼得兩個小正方形。再利用面積等式的推導，即可輕易得到畢氏定理的關係式。

1. 首先來證明 $\Delta ABC \cong \Delta EAJ$：

因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}\,(\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle EAJ = \angle AEJ,$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle EJA,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta EAJ \;\; (\text{AAS 全等}).$$

2. 接著考慮 $\Delta BLC, \Delta AKJ$ 的全等：

因為

$$\overline{AJ}=\overline{BC}\,(\because \Delta ABC\cong\Delta EAJ),$$

而且

$$\angle JAK=90^\circ-\angle CBA=\angle LBC,$$

以及

$$\angle AJK=90^\circ=\angle BCL,$$

所以可以推得

$$\Delta BLC\cong\Delta AKJ\ \ (\text{ASA 全等}).$$

3. 然後要證明$\Delta EON\cong\Delta BMF$：
因為

$$\overline{EN}=\overline{BF},$$

而且

$$\begin{aligned}\angle OEN&=\angle AEJ\\&=\angle CAB(\because \Delta AEJ\cong\Delta ABC)\\&=\angle JAK\\&=\angle CBL(\because \Delta JAK\cong\Delta CBL)\\&=\angle FBM\,(\because \text{對頂角}),\end{aligned}$$

以及

$$\angle ENO=90^\circ=\angle BFM,$$

所以可以推得

$$\Delta EON\cong\Delta BMF\ \ (\text{ASA 全等}).$$

4. 不難發現四邊形$ONJA\cong$四邊形$KIHA$, 以下我們用五個條件給出證明：
因為

$$\overline{AJ}=\overline{AH}\,(\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{NJ}&=\overline{EJ}-\overline{EN}\\&=\overline{AC}-\overline{BF}(\because \Delta ENO\cong\Delta BFM)\\&=\overline{CF}-\overline{BF}(\because \text{正方形的邊})\\&=\overline{BC}\\&=\overline{AJ}(\because \Delta ABC\cong\Delta EAJ)\\&=\overline{HI}(\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

以及

$$\angle OAJ=90^\circ-\angle JAK=\angle KAH,$$

和

$$\angle AJN=\angle JNO=90^\circ=\angle AHI=\angle HIK,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}ONJA\cong\text{四邊形}KIHA\ \ (\text{ASASA 全等}).$$

5. 最後一塊拼片要考慮四邊形$EDLN \cong$四邊形$ABMG$，同樣地我們使用五個條件給出證明：

因為

$$\overline{ED} = \overline{AB}(\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{EJ} &= \overline{CA}(\because \Delta AEJ \cong \Delta BAC)\\ &= \overline{AG}(\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

以及以下的三個角對應相等，

$$\angle LJE = 90^\circ = \angle MGA,$$

和

$$\begin{aligned}\angle JED &= 90^\circ - \angle AEJ\\ &= 90^\circ - \angle CAB(\because \Delta AEJ \cong \Delta BAC)\\ &= \angle GAB,\end{aligned}$$

還有

$$\angle EDL = 90^\circ = \angle ABM,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}EDLN \cong \text{四邊形}ABMG\ (\text{ASASA 全等}).$$

6. 綜合以上拼片對應全等的證明，以下我們從面積等式中推導：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta EON + ONJA + EDLJ + \Delta ABC + \Delta LCB\\ &= \Delta BMF + AKIH + ABMG + \Delta ABC + \Delta AJK\\ &= (\Delta BMF + ABMG + \Delta ABC) + (\Delta AJK + AKIH)\\ &= \square ACFG + \square AHIJ,\end{aligned}$$

即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| ● | | ● | ● | |

4. 補充：華蘅芳簡介：

華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。

另外在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。