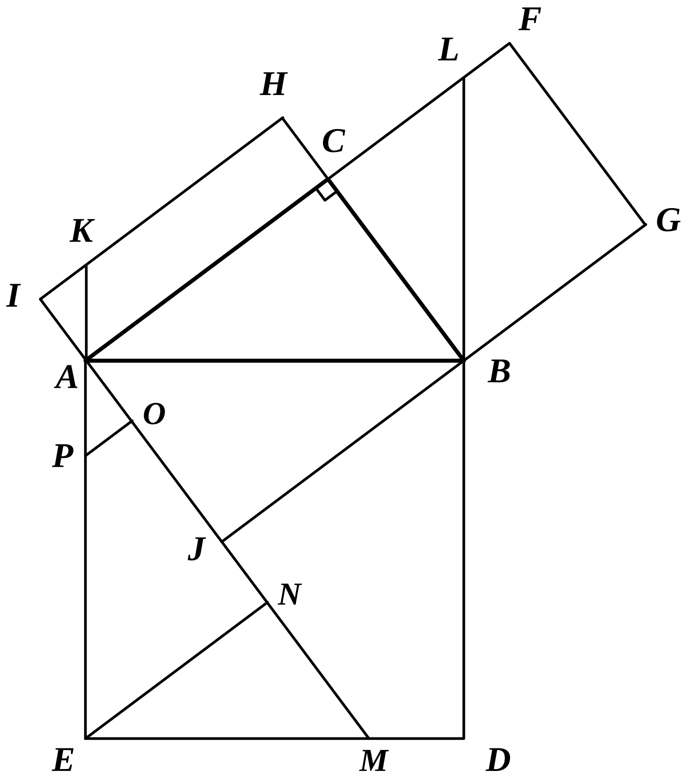
勾股定理證明-華蘅芳 10

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為邊，向外作正方形 $ABDE$；再以 $\overline{BC}$ 為邊，向外作正方形 $BCFG$；接著取一點 H 於 $\overline{BC}$ 延伸線上，使 $\overline{BH}=\overline{AC}$，再以 $\overline{BH}$ 為邊向內作正方形 $BHIJ$。
2. 延伸 $\overline{EA}$ 交 $\overline{HI}$ 於 K；然後延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{CF}$ 於 L；再延伸 $\overline{IJ}$ 交 $\overline{ED}$ 於 M。
3. 過 E 作 ΔAEM 的高，以 N 為垂足。
4. 最後在 $\overline{AM}$ 上取一點 O，使得 $\overline{AO}=\overline{AI}$，再過 O 作 $\overline{AM}$ 的垂直線，交 $\overline{AE}$ 於 P。



【求證過程】

以上輔助圖中，大正方形被輔助線切割成五塊拼片，不難發現這五塊拼片與兩個小正方形內的拼片對應全等，因此可以以這五塊拼片拼得兩個小正方形。再利用面積等式的推導，即可輕易得到畢氏定理的關係式。

1. 首先來證明 $\Delta ABC \cong \Delta BAJ \cong \Delta AEN$：

因為

$$\overline{AB}=\overline{AB}=\overline{AE} \text{ (共用邊及正方形的邊)},$$

而且

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle BAJ$$
$$= \angle EAN,$$

並且

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle BAJ$$
$$= \angle ABJ,$$

以及

$$\angle ACB = \angle ANE = \angle AJB = 90^\circ,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta BAJ \cong \Delta AEN \ \text{(AAS 全等)}.$$

2. 接著證明 $\Delta LCB \cong \Delta MNE$ ：

因為

$$\overline{CB} = \overline{NE}\ (\because \Delta ABC \cong \Delta AEN),$$

而且

$$\begin{aligned}\angle LBC &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle NEA (\because \Delta ABC \cong \Delta AEN) \\ &= \angle NEM,\end{aligned}$$

以及

$$\angle LCB = 90^\circ = \angle ENM,$$

所以可以推得

$$\Delta LCB \cong \Delta MNE \ \text{(ASA 全等)}.$$

3. 不難發現 $\Delta AKI \cong \Delta APO$, 以下我們同樣地給出證明：

因為

$$\overline{AI} = \overline{AO},$$

而且

$$\angle KAI = \angle OAP (\because \text{對頂角}),$$

以及

$$\angle KIA = 90^\circ = \angle POA,$$

所以可以推得

$$\Delta AKI \cong \Delta APO \ \text{(ASA 全等)}.$$

4. 再來證明四邊形 $JMDB \cong$ 四邊形 $HKAB$ ，我們以五個條件寫下它的證明：

因為

$$\overline{AB} = \overline{BD}\ (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\overline{BH} = \overline{BJ}\ (\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle MDB = 90^\circ = \angle KAB,$$

和

$$\angle DBJ = 90^\circ - \angle ABJ = \angle HBA,$$

還有

$$\angle BJM = 90^\circ = \angle BHK,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形} JMDB \cong \text{四邊形} HKAB \ \text{(ASASA 全等)}.$$

5. 最後一塊拼片要證明四邊形$PONE \cong$四邊形$LFGB$，同樣地我們使用五個條件證明它：

因為

$$\overline{EN} = \overline{BC} = \overline{BG}\ (\because \Delta AEN \cong \Delta ABC\text{以及正方形的兩邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{ON} &= \overline{AN} - \overline{AO} \\ &= \overline{BJ} - \overline{IA} (\because \Delta AEJ \cong \Delta BAJ) \\ &= \overline{BH} - \overline{CH} (\because \text{正方形的邊及長方形}IACH\text{的邊}) \\ &= \overline{BC} \\ &= \overline{FG}\ (\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

以及以下的三個角對應相等，

$$\begin{aligned}\angle PEN &= \angle AEN (\because \text{共角}) \\ &= 90^\circ - \angle NEM \\ &= 90^\circ - \angle CBL (\because \Delta EMN \cong \Delta BLC) \\ &= \angle LBG,\end{aligned}$$

還有

$$\angle ENO = \angle NOP = 90^\circ = \angle BGF = \angle GFL,$$

所以我們可以推得

$$\text{四邊形}PONE \cong \text{四邊形}LFGB\ (\text{ASASA 全等}).$$

6. 綜合以上拼片對應全等的證明，以下我們從面積等式中推導：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta APO + PONE + \Delta ENM + \Delta AJB + JBDM \\ &= \Delta AKI + LFGB + \Delta BLC + \Delta AJB + HBAK \\ &= (\Delta BLC + LFGB) + (\Delta AKI + HBAK + \Delta AJB) \\ &= \square BCFG + \square BHIJ,\end{aligned}$$

即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：

華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。

另外在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。