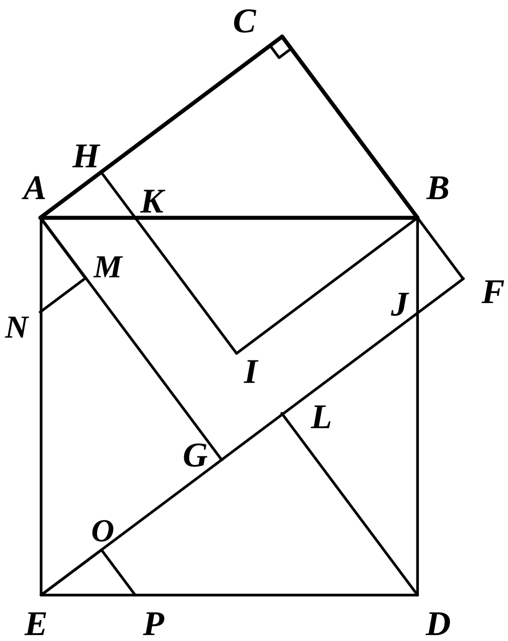
勾股定理證明-華蘅芳 07

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ 三邊為邊分別向外、向內、向內作正方形 $ABDE, ACFG, BCHI$。
2. 其中 $\overline{BD}$ 與 $\overline{FG}$ 交於 J，而 $\overline{HI}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 K。
3. 過 D 作 $\overline{EJ}$ 的垂直線交 $\overline{EJ}$ 於 L。
4. 在 $\overline{AG}$ 上取 M 使 $\overline{AM} = \overline{AH}$，再過 M 作 $\overline{AG}$ 的垂直線交 $\overline{AE}$ 於 N。
5. 在 $\overline{EL}$ 上取 O 使 $\overline{EO} = \overline{AH}$，再過 O 作 $\overline{EL}$ 的垂直線交 $\overline{ED}$ 於 P。



【求證過程】

以直角三角形的斜邊為邊作出的大正方形可以透過輔助線將之切割成七片拼片。我們不難證明大正方形中的拼片與兩個小正方形中的拼片對應全等，再透過面積的等式推導，就可以得到畢氏定理關係式。

1. 首先我們給出 $\Delta ABC \cong \Delta AEG \cong \Delta EDL$ 的證明：

   因為
   $$\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{ED} \text{ (正方形的邊)},$$
   而且
   $$\begin{aligned} \angle CAB &= 90^\circ - \angle BAG \\ &= \angle GAE \\ &= 90^\circ - \angle AEG \\ &= \angle LED, \end{aligned}$$
   以及
   $$\angle ACB = \angle AGE = \angle ALD = 90^\circ,$$
   所以可以推得
   $$\Delta ABC \cong \Delta AEG \cong \Delta EDL \text{ (AAS 全等)}.$$

2. 不難發現 $\Delta AKH, \Delta ANM, \Delta EPO, \Delta BJF$ 也都是全等的直角三角形, 以下給出證明：

因為

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{CA}-\overline{CH}\\ &= \overline{CF}-\overline{CB}(\text{正方形的邊})\\ &= \overline{BF},\end{aligned}$$

還有

$$\overline{AH} = \overline{AM} = \overline{EO},$$

而且

$$\angle HAK = \angle MAN = \angle OEP\ (\because \Delta ABC \cong \Delta AEG \cong \Delta EDL)\text{；}$$

因為

$$\angle HAK = 90^\circ - \angle CBA = \angle JBF,$$

再加上

$$\angle AHK = \angle AME = \angle EOP = \angle BFJ = 90^\circ,$$

所以可以推得

$$\Delta AKH \cong \Delta ANM \cong \Delta EPO \cong \Delta BJF\ (\text{ASA 全等}).$$

3. 接著證明$\Delta BKI \cong \Delta DJL$：
因為

$$\begin{aligned}\overline{BI} &= \overline{BC}(\because \text{正方形的邊})\\ &= \overline{LD}(\because \Delta ABC \cong \Delta EDL),\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}\angle KBI &= 90^\circ - \angle CBA\\ &= 90^\circ - \angle LDE(\because \Delta ABC \cong \Delta EDL)\\ &= \angle JDL,\end{aligned}$$

以及

$$\angle BIK = 90^\circ = \angle DLJ,$$

所以可以推得

$$\Delta BKI \cong \Delta DJL\ (\text{ASA 全等}).$$

4. 也不難發現$NMGE \cong KHCB \cong PQLD$, 以下我們以五個條件來證明四邊形的全等：
因為

$$\overline{HK} = \overline{NM} = \overline{OP}(\because \Delta AKH \cong \Delta ANM \cong \Delta EPO),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{CH} &= \overline{AC}-\overline{AH}\\ &= \overline{AG}-\overline{AM}(\because \text{正方形的邊以及}\Delta AKH \cong \Delta ANM)\\ &= \overline{MG},\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}\overline{CH} &= \overline{AC} - \overline{AH}\\ &= \overline{EL} - \overline{EO} (\because \Delta ABC \cong \Delta EDL \text{且} \Delta AKH \cong \Delta EPO)\\ &= \overline{OL},\end{aligned}$$

還有

$$\overline{CB} = \overline{EG} = \overline{DL},$$

再加上

$$\angle KHC = \angle HCB = \angle NMG = \angle MGE = \angle POL = \angle OLD = 90^\circ,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形} NMGE \cong \text{四邊形} KHCB \cong \text{四邊形} PQLD (\text{SASAS 全等}).$$

5. 綜合以上的全等證明，就可以從面積等式中推導關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta AMN + MNEG + \Delta EOP + OPDL + \Delta JLD + AGJB\\ &= \Delta AHK + HKBC + \Delta BJF + HKBC + \Delta KIB + AGJB\\ &= (\Delta AHK + HKBC + AGJB + \Delta BJF) + (HKBC + \Delta KIB)\\ &= \square ACFG + \square BCHI,\end{aligned}$$

即畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。
   另外在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。