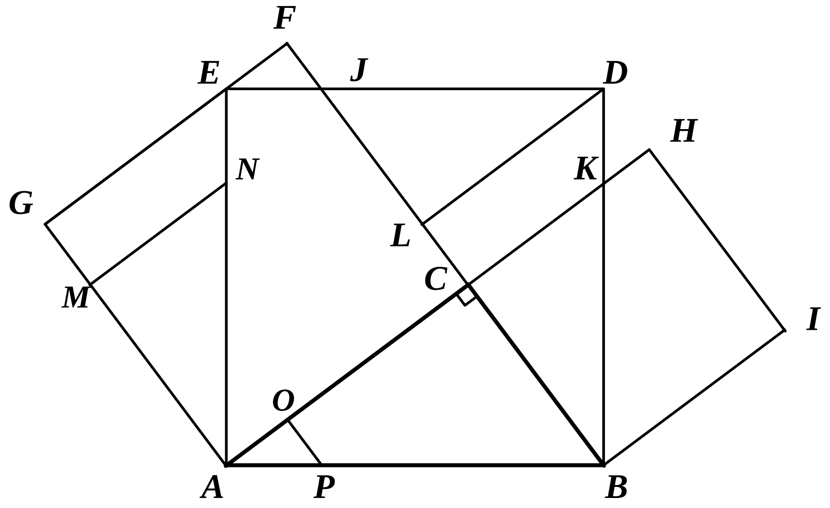
勾股定理證明-華蘅芳 04

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 三邊為邊，分別向內、向外、向外作正方形。可以得到正方形 $ABDE$ 、正方形 $ACFG$ 、正方形 $BCHI$ 。此處會發現 E 必落在 $\overline{GF}$ 上，也就是 $G-E-F$ 三點共線，將在後面給出證明。
2. 其中 $\overline{CF}$ 與 $\overline{ED}$ 的交於 J ， $\overline{CH}$ 與 $\overline{BD}$ 的交於 K 。
3. 過 D 作 ΔBJD 的高線，垂足 L 。
4. 在 $\overline{GA}$ 上取 M 使 $\overline{GM}=\overline{CL}$ ，再過 M 作 $\overline{GA}$ 的垂直線交 $\overline{AE}$ 於 N 。
5. 在 $\overline{AC}$ 上取 O 使 $\overline{AO}=\overline{EF}$ ，再過 O 作 $\overline{AC}$ 的垂直線交 $\overline{AB}$ 於 P 。



【求證過程】

我們先證明 $G-E-F$ 三點共線，以確定這個圖的正確性。接著會發現大正方形被這些輔助線切割成六個拼片，其中二個不用移動，而我們將證明另外四個拼片與相對應的四拼片個是全等的。接著再推導面積關係式即可以證明畢氏定理。

1. 首先我們給出 $\Delta ABC \cong \Delta AEG$ 的證明：
   因為
   $$\overline{AC}=\overline{AG}\,(\text{正方形中兩邊}),$$
   而且
   $$\overline{AB}=\overline{AE}\ \ (\text{正方形中兩邊}),$$
   以及
   $$\angle BAC = 90^\circ - \angle EAC = \angle EAG,$$
   所以可以推得
   $$\Delta ABC \cong \Delta AEG.$$
2. 不難發現 $G-E-F$ 共線，以下給個證明：
   為了得到 $G-E-F$ 共線，我們要先說明 $\angle AGE = \angle AGF$ ，其中 $\angle AGE$ 是三角形 EGA 的一內角，而 $\angle AGF$ 是正方形 $ACFG$ 的一內角。而我們已知 $\angle AGF=90^\circ$ ，因為是正方形的一個角，故只要證明 $\angle EGA=90^\circ$ 即可。
   而因為 1.的證明我們知道

$$\Delta ABC \cong \Delta AEG,$$

所以可以確定

$$\angle EGA = \angle BCA = 90^\circ,$$

因此

$$G - E - F \text{ 共線.}$$

3. 接著給出 $\Delta AOP \cong \Delta EFJ$ 的證明：

因為

$$\overline{AO} = \overline{EF},$$

而且

$$\begin{aligned}\angle OAP &= 90^\circ - \angle EAO \\ &= 90^\circ - \angle AEG (\text{平行線}\overline{AC},\overline{GE}\text{的內錯角}) \\ &= \angle FEJ,\end{aligned}$$

以及

$$\angle AOP = 90^\circ = \angle EFJ,$$

所以可以推得

$$\Delta AOP \cong \Delta EFJ \text{ (ASA 全等).}$$

4. 不難發現 $\Delta MNA \cong \Delta CKB \cong \Delta LJD$, 以下我們給出證明：

這裡我們先證明 $\Delta ABC \cong \Delta BDL$ ：

其中因為

$$\overline{AB} = \overline{DB} (\text{正方形兩邊}),$$

而且

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle DLB,$$

以及

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle DBL,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta BDL \text{ (AAS 全等).}$$

再由 $\Delta ABC \cong \Delta BDL \cong \Delta AEG$, 因此可以得到 $\overline{GA} = \overline{LB}$ ；

接著考慮 $\Delta MNA, \Delta CKB$ 的全等，因為有

$$\overline{AM} = \overline{GA} - \overline{GM} = \overline{LB} - \overline{LC} = \overline{BC},$$

而且

$$\angle MAN = \angle GAE = \angle LBD = \angle CBK,$$

以及

$$\angle NMA = 90^\circ = \angle KCB,$$

所以

$$\Delta MNA \cong \Delta CKB \text{ (ASA 全等).}$$

而 $\Delta CKB, \Delta LJD$ 的全等證明如下，因為

$$\overline{DL} = \overline{CB} (\text{全等三角形的邊}),$$

而且

$$\angle JLD = 90^\circ = \angle KCB,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle BKC &= \angle BDL(\text{平行線}\overline{DL},\overline{HC}\text{的同位角})\\ &= 90^\circ - \angle JDL\\ &= \angle DJL,\end{aligned}$$

，所以可以推得

$$\Delta CKB \cong \Delta LJD \ (\text{AAS 全等}).$$

綜合以上我們就證明了

$$\Delta MNA \cong \Delta CKB \cong \Delta LJD.$$

5. 接著不難發現四邊形$GENM \cong$四邊形$LDKC$, 以下我們使用五個對應相等來證明這個事實：

因為

$$\overline{GM} = \overline{LC},$$

而且

$$\overline{GE} = \overline{LD}\,(\text{全等三角形的對應邊}),$$

以及

$$\overline{MN} = \overline{CK}\,(\text{全等三角形的對應邊}),$$

到這裡我們就已經證明三個邊等長了！

再加上這三邊的兩個夾角對應相同，

$$\angle EGM = \angle NMG = 90^\circ = \angle DLC = \angle KCL,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}GENM \cong \text{四邊形}LDKC\,(\text{SASAS 全等}).$$

6. 接著證明四邊形$POCB \cong$四邊形$KHIB$，同樣地要有三邊及兩角的相同，以下是證明：

因為

$$\overline{CB} = \overline{BI}\ (\text{正方形的兩邊}),$$

而且

$$\begin{aligned}\overline{KB} &= \overline{DB} - \overline{DK}\\ &= \overline{AB} - \overline{EN}\begin{pmatrix}\overline{DB} = \overline{AB}\text{是因為}\Delta ABC \cong \Delta BDL,\\ \overline{DK} = \overline{EN}\text{是因為四邊形}GENM \cong \text{四邊形}LDKC.\end{pmatrix}\\ &= \overline{AB} - \left(\overline{EA} - \overline{NA}\right)\\ &= \overline{AB} - \left(\overline{ED} - \overline{JD}\right)\begin{pmatrix}\overline{EA} = \overline{ED}\text{是因為正方形的兩邊},\\ \overline{NA} = \overline{JD}\text{是因為}\Delta MNA \cong \Delta LJD.\end{pmatrix}\\ &= \overline{AB} - \overline{EJ}\\ &= \overline{AB} - \overline{AP}\left(\overline{EJ} = \overline{AP}\text{是因為}\Delta AOP \cong \Delta EFJ\right)\\ &= \overline{PB},\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{OC} &= \overline{AC} - \overline{AO} \\ &= \overline{GF} - \overline{EF}\left(\begin{aligned}&\overline{AC} = \overline{GF}\text{是因為正方形的兩邊} \\ &\overline{AO} = \overline{EF}\text{是因為}\Delta AOP \cong \Delta EFJ\end{aligned}\right) \\ &= \overline{GE} = \overline{LD} = \overline{CB}\left(\text{因為}\Delta AGE \cong \Delta BLD \cong \Delta ACB\right) \\ &= \overline{HI},\end{aligned}$$

再加上兩個夾角對應相等，

$$\angle POC = \angle OCB = 90^\circ = \angle HIB = \angle KHI,$$

所以我們可以推得

$$\text{四邊形}POCB \cong \text{四邊形}KHIB\ (\text{SASAS 全等}).$$

7. 綜合以上證明了對應拼片的全等，再利用面積等式的推導，可以得到關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta APO + PBCO + \Delta BCK + CKDL + \Delta DLJ + EJCA \\ &= \Delta EFJ + BIHK + \Delta BCK + GMNE + \Delta AMN + EJCA \\ &= (\Delta EFJ + EJCA + GMNE + \Delta AMN) + (\Delta BCK + BIHK) \\ &= \square ACFG + \square BCHI,\end{aligned}$$

這也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：華蘅芳簡介：
   華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物之一。

另外在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。