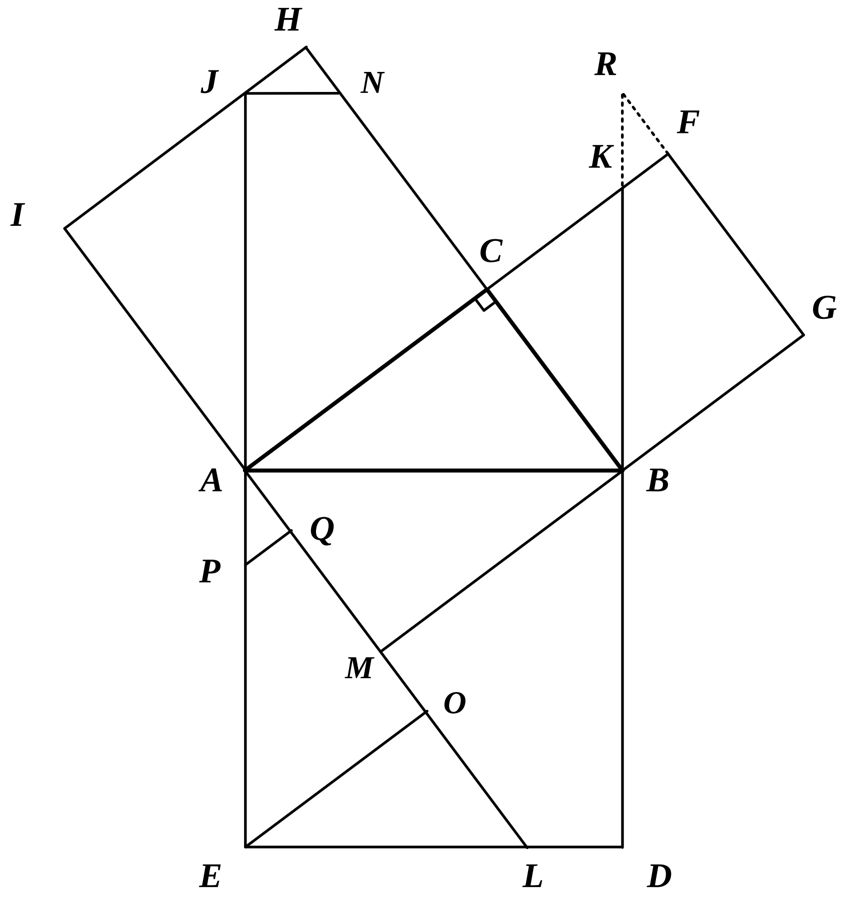
勾股定理證明-華蘅芳 01

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 三邊為邊，分別向外作正方形 $ABDE$ ，正方形 $BCFG$ ，及正方形 $ACHI$ 。
2. 接著延伸 $\overline{EA}$ 交 $\overline{IH}$ 於 J ；延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{CF}$ 於 K ；延伸 $\overline{IA}$ 交 $\overline{DE}$ 於 L ；延伸 $\overline{GB}$ 交 $\overline{AL}$ 於 M 。
3. 然後過 J 作 $\overline{AJ}$ 的垂線，交 $\overline{CH}$ 於 N ；從 E 作 $\overline{AL}$ 的垂線，交 $\overline{AL}$ 於 O 。
4. 在 $\overline{AL}$ 上取 Q 點使 $\overline{AQ}=\overline{JH}$ ；並過 Q 作 $\overline{AL}$ 的垂線，交 $\overline{AE}$ 於 P 。
5. 延伸 $\overline{BK}$ ，延伸 $\overline{GF}$ ，交於 R 。



【求證過程】

以上輔助圖將一大兩小的正方形切割，在證明對應的拼片都是全等的圖形後，就能直接以拼圖的方式拼出大正方形。從這拼圖式的面積關係推導中，就可以得到畢氏定理關係式。

1. 不難發現 $\Delta AJI,\Delta ABC,\Delta BAM,\Delta AEO,\Delta RBG$ 為全等的直角三角形，以下給出證明：
   其中先考慮 $\Delta ABC,\Delta BAM$ ，因為我們知道 $\overline{AF}$ 平行於 $\overline{MG}$ ，則
   $$\angle CAB=\angle MBA\,(\text{內錯角相等}),$$
   並且
   $$\angle CBA=\angle MAB\,(\text{內錯角相等}),$$
   以及

$$\overline{AB}=\overline{AB}\,(\text{共用邊}),$$

所以就可推得

$$\Delta ABC\cong\Delta BAM\ (\text{ASA 全等}).$$

再來看$\Delta ABC,\Delta AJI$ ，因為有

$$\overline{AC}=\overline{AI},$$

而且

$$\angle JAI=90^{\circ}-\angle JAI=\angle BAC,$$

以及

$$\angle AIJ=90^{\circ}=\angle ACB,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC\cong\Delta AJI\ (\text{ASA 全等}).$$

接著考慮$\Delta ABC,\Delta AEO$的全等，其中因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}\ (\text{正方形的兩邊}),$$

而且

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle AOE,$$

以及

$$\angle CAB=90^{\circ}-\angle BAM=\angle OAE,$$

所以

$$\Delta ABC\cong AEO\,(\text{AAS 全等}).$$

再來看$\Delta AEO,\Delta RBG$的全等，其中因為

$$\begin{aligned}\overline{EO}&=\overline{CB}\,(\because\ \Delta AEO\cong\Delta ABC)\\&=\overline{BG}\,(\text{正方形的兩邊}),\end{aligned}$$

而且

$$\angle AOE=90^{\circ}=\angle RGB,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle AEO&=\angle CBA(\because\ \Delta ABC\cong\Delta AEO)\\&=90^{\circ}-\angle KBC\\&=\angle KBG,\end{aligned}$$

所以可以推得

$$\Delta AEO\cong\Delta RBG\,(\text{ASA 全等}).$$

綜合以上我們完成了

$$\Delta AJI\cong\Delta ABC\cong\Delta BAM\cong\Delta AEO\cong\Delta RBG.$$

2. 接著來證明$\Delta APQ\cong\Delta JNH$ ：

這是因為

$$\overline{AQ}=\overline{JH},$$

而且

$$\angle HJN = 90^\circ - \angle AJI$$
$$= \angle JAI$$
$$= \angle QAP(\text{對頂角相等}),$$

以及

$$\angle JHN = 90^\circ = \angle AQP,$$

所以就可以推得

$$\Delta APQ \cong \Delta JNH \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 接著我們給出$\Delta ELO \cong \Delta BKC$的證明：

這是因為

$$\overline{EO} = \overline{BC} \ (\because \Delta AEO \cong \Delta ABC),$$

而且

$$\angle LEO = 90^\circ - \angle AEO$$
$$= 90^\circ - \angle ABC(\because \Delta ABC \cong \Delta AEO)$$
$$= \angle KBC,$$

以及

$$\angle EOL = 90^\circ = \angle BCK,$$

因此可以推得

$$\Delta ELO \cong \Delta BKC \text{ (AAS 全等)}.$$

4. $\Delta APQ, \Delta RKF$ 是全等三角形，這裡給出證明

$$\overline{RF} = \overline{RG} - \overline{FG}$$
$$= \overline{IA} - \overline{CB}(\because \Delta RGB \cong \Delta AIJ \text{及正方形的兩個邊})$$
$$= \overline{IH} - \overline{IJ}(\because \text{正方形的兩邊以及} \Delta ABC \cong \Delta AJI)$$
$$= \overline{HJ}$$
$$= \overline{AQ},$$

而且

$$\angle PAQ = \angle EAO$$
$$= \angle BRG(\because \Delta AEO \cong \Delta RBG) \text{，}$$
$$= \angle KRF,$$

以及

$$\angle AQP = 90^\circ = \angle AFK,$$

所以可推得

$$\Delta APQ \cong \Delta RKF \text{ (ASA 全等)}.$$

5. 也不難發現四邊形$BGKF$全等於四邊形$EOPQ$，以下我們用五個對應相等的條件，來證明這個事實：

在$\Delta APQ \cong \Delta RKF$中

$$\overline{PQ} = \overline{KF},$$

並且我們有

$$\begin{aligned}\overline{QO} &= \overline{AO} - \overline{AQ}\\ &= \overline{RG} - \overline{RF} (\because \Delta AEO \cong \Delta RBG, \Delta APQ \cong \Delta RKF)\\ &= \overline{FG},\end{aligned}$$

而且

$$\overline{EO} = \overline{BG}\ (\Delta AEO \cong \Delta RBG),$$

以及加上對應角的相等：

$$\angle PQO = \angle QOE = \angle KFG = \angle FGB = 90^\circ,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形}BGKF \cong \text{四邊形}EOPQ\ (\text{SASAS 全等}).$$

6. 最後四邊形 $JNCA$ 亦全等於四邊形 $DLMB$，同樣地我們以五個對應相等的條件給出證明：

因為

$$\overline{MB} = \overline{AC}\ (\because \Delta BAM \cong \Delta ABC),$$

而且有

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \overline{AB} (\text{正方形的兩邊})\\ &= \overline{AJ} (\because \Delta ABC \cong \Delta AJI),\end{aligned}$$

以及有

$$\begin{aligned}\overline{LD} &= \overline{ED} - \overline{EL}\\ &= \overline{AB} - \overline{KB} (\because \Delta ELO \cong \Delta BKC \text{以及正方形的兩邊})\\ &= \overline{RB} - \overline{KB} (\because \Delta ABC \cong \Delta RBG)\\ &= \overline{RK}\\ &= \overline{JN} (\because \Delta RKF \cong \Delta JNH),\end{aligned}$$

以及兩組對應角相等：

$$\begin{aligned}\angle MBD &= 90^\circ - \angle ABM\\ &= 90^\circ - \angle JAI (\because \Delta ABM \cong \Delta JAI)\\ &= \angle JAC,\end{aligned}$$

和

$$\angle BDL = 90^\circ = \angle AJN,$$

所以就可以推得

$$\text{四邊形}JNCA \cong \text{四邊形}DLMB\ (\text{SASAS 全等}).$$

7. 綜合以上全等的證明，就可以以面積等式來推導關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta APQ + PQOE + \Delta EOL + \Delta AMB + MBDL \\ &= \Delta JHN + KFGB + \Delta KBC + \Delta IAJ + ACNJ \\ &= (\Delta IJA + \Delta JHN + JNCA) + (\Delta CKB + KFGB) \\ &= \square ACHI + \square BCFG,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自於清末數學家華蘅芳(1833-1902)二十二個勾股證明之一，除此之外還收錄於以下書籍：
   Edwards, George C.(1895). 《*Elements of Geometry*》(p.161). NewYork : Macmilla and co.
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形以三邊為邊分別作三個正方形，只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：

(1) 華蘅芳簡介：

華蘅芳(1833-1902)清末數學家，在《雙套句股》提供了二十
二種精彩的勾股定理證明，其證明方式皆為圖形的割補；華蘅芳同時也為機械工程專家，與徐壽製成中國第一台蒸氣機，少年時酷愛數學，遍覽當時各種數學書籍，與李善蘭相善，在數學研究、科技著作、書籍翻譯都有出色的表現，使高等數學的基礎知識及方法得以進一步傳播，中國早期掌握和傳播近代科技的代表人物
之一。

另外在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：