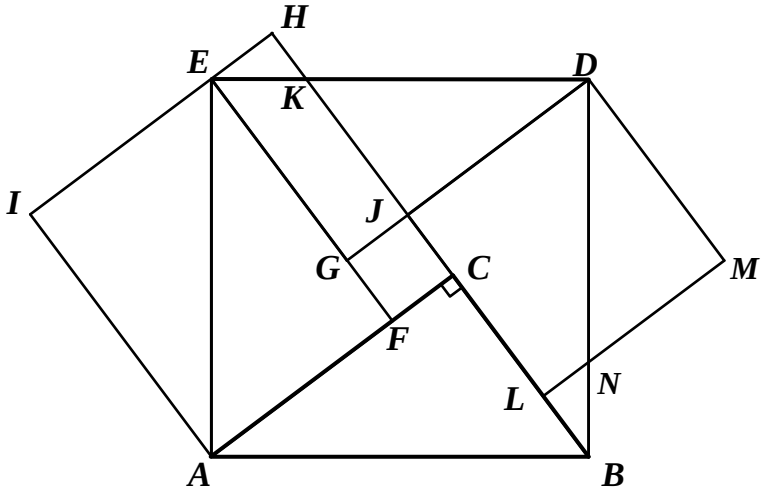
勾股定理證明-李善蘭

【作輔助圖】

1. 以直角三角形ΔABC的$\overline{AB}$為邊向內作正方形，得到正方形$ABDE$。
2. 並從E作$\overline{AC}$的垂直線，會交$\overline{AC}$於F；從D作$\overline{EF}$的垂直線，會交$\overline{EF}$於G。
3. 再以$\overline{AC}$為邊向外作正方形，可以得到正方形$ACHI$。其中$\overline{CH}$與$\overline{DG}$的交於J，而$\overline{CH}$與$\overline{BD}$的交於K。
4. 最後以$\overline{DJ}$為邊向外作正方形，可以得到正方形$DJML$，其中$\overline{LM}$與$\overline{BD}$交於N。



可以從輔助圖中看到大正方形被這些輔助線切割成幾個拼片，可以拿來重新組合兩個小正方形，在證明完它們各個拼片的對應全等後，就可以從面積等式中推導得到畢氏定理。

1. 首先證明$\Delta ABC \cong \Delta EAF \cong \Delta DEG \cong \Delta BDJ \cong \Delta AEI$：
   其中我們先證明$\Delta ABC \cong \Delta EAF$，是因為
   $$\overline{AB} = \overline{AE} \ (\because \text{正方形的邊}),$$
   而且
   $$\angle CAB = 90^\circ - \angle EAF = \angle AEF,$$
   以及
   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle EFA,$$
   所以可以推得
   $$\Delta ABC \cong \Delta EAF \ \ (\text{AAS 全等})；$$
   再看$\Delta DEG \cong \Delta EAF$：
   因為
   $$\overline{EA} = \overline{ED} \ (\because \text{正方形的邊}),$$
   而且
   $$\angle AEF = 90^\circ - \angle DEG = \angle EDG,$$
   以及
   $$\angle AFE = 90^\circ = \angle EGD,$$

所以可以推得

$$\Delta DEG \cong \Delta EAF \text{ (AAS 全等)；}$$

接著看 $\Delta DEG \cong \Delta BDJ$ ：

因為

$$\overline{ED} = \overline{DB} \text{ (}\because \text{ 正方形的邊)},$$

而且

$$\angle EDG = 90^\circ - \angle BDJ = \angle DBJ,$$

以及

$$\angle AFE = 90^\circ = \angle EGD,$$

所以可以推得

$$\Delta DEG \cong \Delta BDJ \text{ (AAS 全等)；}$$

還有 $\Delta ABC \cong \Delta AEI$ ：

因為

$$\overline{AB} = \overline{AE} \text{ (}\because \text{ 正方形的邊)},$$

而且

$$\angle BAC = 90^\circ - \angle EAF = \angle IAE,$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle AIE,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta AEI \text{ (AAS 全等)}.$$

綜合以上我們就完成證明了

$$\Delta ABC \cong \Delta EAF \cong \Delta DEG \cong \Delta BDJ \cong \Delta AEI.$$

2. 不難發現 $\Delta DKJ \cong \Delta DNM$ ，以下給出證明：

因為

$$\overline{DJ} = \overline{DM} \text{ (}\because \text{ 正方形的邊)},$$

而且

$$\angle KDJ = 90^\circ - \angle DJN = \angle NDM,$$

以及

$$\angle KJN = 90^\circ = \angle DMN,$$

所以可以推得

$$\Delta DKJ \cong \Delta DNM \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 也可以發現 $\Delta EKH \cong \Delta BNL$ ，同樣地我們給出證明：

因為

$$\begin{aligned}\overline{EK} &= \overline{DE} - \overline{DK} \\ &= \overline{DB} - \overline{DN} (\because \text{ 正方形的邊以及} \Delta DKJ \cong \Delta DNM) \\ &= \overline{BN},\end{aligned}$$

而且

$$\angle HKE = \angle DKJ (\because \text{對頂角})$$
$$= \angle DNM (\because \Delta DKJ \cong \Delta DNM)$$
$$= \angle LNB (\because \text{對頂角}),$$

以及

$$\angle EHK = 90^\circ = \angle NLB,$$

所以可以推得

$$\Delta EKH \cong \Delta BNL \text{ (AAS 全等)}.$$

4. 最後再利用拼圖式的面積關係式：

$$\square ABDE = \Delta ABC + \Delta EAF + EGJK + \Delta KDJ + CFGJ + DJLN + \Delta BNL$$
$$= \Delta AEI + \Delta EAF + EGJK + \Delta NDM + CFGJ + DJLN + \Delta EKH$$
$$= (\Delta AEI + \Delta EAF + EGJK + CFGJ + \Delta EKH) + (DJLN + \Delta DNM)$$
$$= \square ACHI + \square DMLJ,$$

這也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

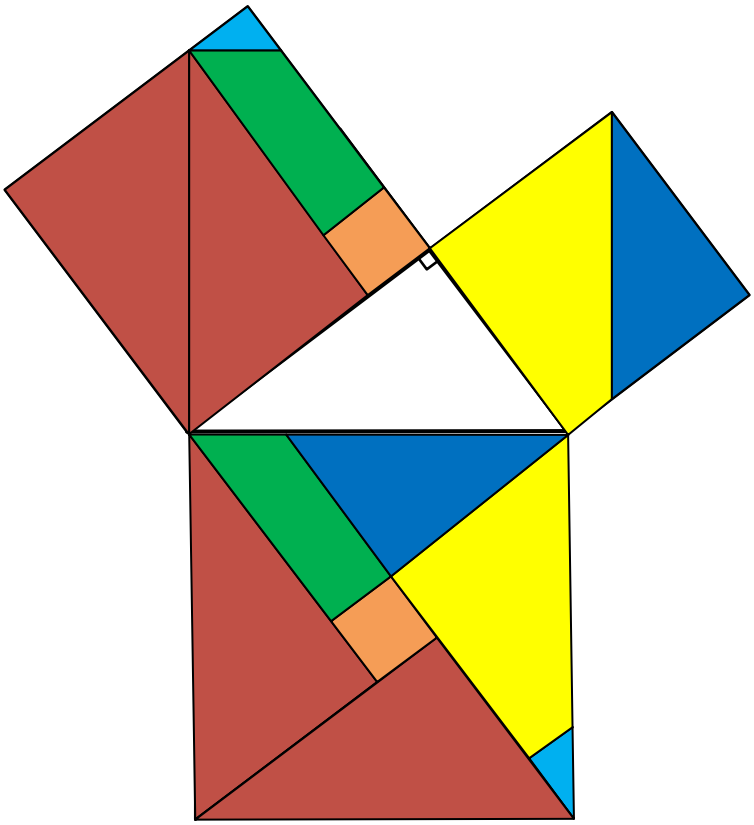
1. 來源：此證明來自於清代著名數學家李善蘭(1810-1882)的證明。
2. 心得：此證明屬於拼圖式的證明，任意直角三角形三邊作三正方形只要採正確的方法作輔助線切割，即可得到拼片來證明畢氏定理，這也是這類證明最精采的地方。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：

(1) 李善蘭簡介：

李善蘭(1810-1882)中國清代數學家，近代科學的先趨者。撰《四元解》、《麟德術解》、《弧矢啟秘》、《萬圓闡幽》及《對數探源》等，聲名大起。與英人偉烈亞力合譯《幾何原本》後九卷，完成明末徐光啟、利瑪竇未竟之業。又與偉烈亞力、艾約瑟等合譯《代微積拾級》、《重學》、《談天》等多種西方數學及自然科學書籍。李善蘭以《測圓海鏡》為基本教材，培養人才甚多。他學通古今，融中西數學於一堂。著有《則古昔齋算學》十三種二十四卷，其中對尖錐求積術的探討，已初具積分思想，於三角函數與對數的冪級數展開式、高階等差級數求和等題解的研究，皆卓然有得，達到中國傳統數學的很高水平。繼梅文鼎之後，成為清代數學史上的又一傑出代表。他一生翻譯西方科技書籍甚多，將近代科學最主要的幾門知識從天文學到植物細胞學的最新成果介紹傳入中國，對促進近代科學的發展作出卓越貢獻。

另外在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
以及
N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。
(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：