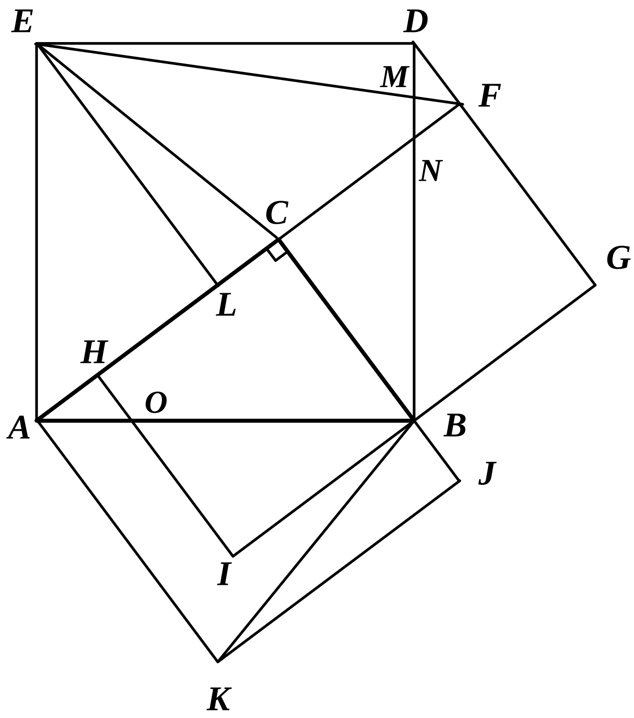
勾股定理證明-G255

【作輔助圖】

1. 以直角三角形ΔABC的$\overline{AB}$為邊向內作正方形$ABDE$，再以為邊$\overline{BC}$向外作正方形$BCFG$，然後向內作正方形$BCHI$，以$\overline{AC}$為邊向內作正方形$ACJK$。連$\overline{DF}$。
2. 接著從E作$\overline{AC}$的垂線，交$\overline{AC}$於L；
3. 最後連$\overline{EF}$與$\overline{DN}$交於M；$\overline{BD}$與$\overline{CF}$交於N；$\overline{IH}$與$\overline{AB}$交於O；連$\overline{BK}$。



【求證過程】

不難發現其中三個直角三角形是全等的，在給出證明後分別利用全等及同底等高來證明圖中三個三角形的面積相等，最後從大正方形面積的等式推導，可以拆成兩個小正方形的面積之和，也就從中得到畢氏定理的關係式。

1. 首先不難看出$\Delta ABC \cong \Delta DBG \cong \Delta EAL$，以下我們給出證明：

   其中我們先考慮$\Delta ABC \cong \Delta DBG$，是因為

   $$\overline{AB} = \overline{BD} (\because \text{正方形的邊}),$$

   而且

   $$\begin{aligned} \angle ABC &= 90^\circ - \angle NBC \\ &= \angle DBG, \end{aligned}$$

   以及

   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle DGB,$$

   所以可以推得

   $$\Delta ABC \cong \Delta DBG \text{ (AAS 全等)；}$$

   再來看$\Delta ABC \cong \Delta EAL$的全等證明：

   因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}(\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle EAL$$
$$= \angle AEL,$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle ALE,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta EAL \ (\text{AAS 全等})；$$

因此我們已經證明了

$$\Delta ABC \cong \Delta DBG \cong \Delta EAL.$$

2. 接著來證明$\Delta EAC \cong \Delta BAK$：
   因為

$$\overline{EA}=\overline{BA}(\because \text{正方形的邊}),$$

   而且

$$\overline{AK}=\overline{AC}(\because \text{正方形的邊}),$$

   以及

$$\angle EAC = 90^\circ - \angle CAB = \angle BAK,$$

   所以可以推得

$$\Delta EAC \cong \Delta BAK \ (\text{SAS 全等}).$$

3. 現在我們要以同底等高證明ΔCFE的面積等於ΔBGD的面積：
   因為$\overline{CF}=\overline{BG}(\because$ 正方形的邊$)$而且$\overline{CF}$的高為$\overline{EL}=\overline{DG}(\because \Delta EAL \cong \Delta DBG)$，所以可以推得

$$\Delta CFE \text{的面積等於} \Delta BGD \text{的面積 (同底等高)}$$

4. 另外也是因為同底等高可以看出ΔDFE的面積等於ΔBJK的面積，以下給出證明：
   因為

$$\begin{aligned}\overline{DF} &= \overline{DG}-\overline{FG}\\ &= \overline{AC}-\overline{CB}(\because \Delta DBG \cong \Delta ABC\text{且考慮正方形的邊})\\ &= \overline{CJ}-\overline{CB}\ (\because \text{正方形的邊})\\ &= \overline{BJ},\end{aligned}$$

   而且

$$\begin{aligned}\overline{FL} &= \overline{FC}+\overline{CL}\\ &= \overline{CB}+\overline{CL}(\because \text{正方形的邊})\\ &= \overline{AL}+\overline{CL}\ (\because \Delta EAL \cong \Delta ABC)\\ &= \overline{AC}\\ &= \overline{JK}\ (\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

   以上所述，也就是ΔDFE及ΔBJK中，底$\overline{DF}=\overline{BJ}$，高$\overline{DF}=\overline{JK}$，所以

ΔDFE 的面積等於 ΔBJK 的面積 (同底等高)

5. 綜合以上，再經由面積的關係可以推導以下等式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta ACE + (\Delta FCE + \Delta DFE - \Delta DNF) + \Delta CNB \\ &= \Delta ABC + \Delta AKB + \Delta DBG + \Delta BJK - \Delta DNF + \Delta CNB \\ &= (\Delta ABC + \Delta AKB + \Delta BJK) + (\Delta BDG - \Delta DNF + \Delta CNB) \\ &= \square ACJK + \square BCFG,\end{aligned}$$

也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是由 Bob Chillag 一位 Central Junior-Senior High School, of South Bend, Indiana 的學生於 1940 年所證。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 255 號
2. 心得：此證明用到了同底等高則三角形面積相等的性質，而這兩組三角形的面積相等並不是這麼好察覺。所以我想在教學上要強調的是如何透過觀察找到全等三角形，以及若要證明三角形面積相等，在沒有全等的狀況下，可以證明同底等高。在這樣巧妙的安排下就可以輕鬆地證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。