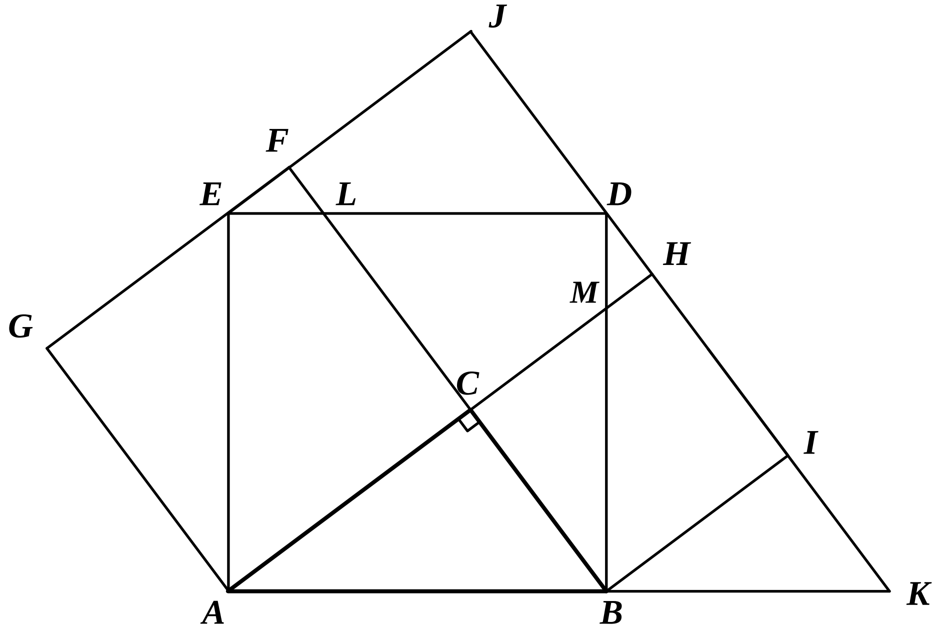
勾股定理證明-G254

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形ΔABC三邊$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$為正方形的邊，分別向內作正方形$ABDE$，向外作正方形$ACFG$及正方形$BCHI$。
2. 接著延伸$\overline{GF}$及$\overline{IH}$交於J，延伸$\overline{HI}$及$\overline{AB}$交於K。



【求證過程】

作完輔助圖後不難發現五組全等的直角三角形，在我們給出證明之後，就可以將大正方形拆成兩個小正方形面積之和，也就證明了畢氏定理關係式。

1. 不難發現ΔAEG和ΔABC是全等的，以下我們給出證明：
   因為
   $$\overline{AB}=\overline{AE}\ (\text{正方形}\ ABDE\ \text{兩邊}),$$
   且
   $$\overline{AC}=\overline{AG}\ (\text{正方形}\ ACFG\ \text{兩邊}),$$
   且
   $$\angle AGE=90^\circ=\angle ACB,$$
   所以
   $$\Delta ABC\cong\Delta AEG\ \ (\text{RHS 全等}).$$
2. 接著也不難發現ΔBDL和ΔDBK全等，以下給出證明：
   因為
   $$\angle DBL=\angle BDK\ (\text{平行的內錯角相等}),$$
   且
   $$\angle BDL=90^\circ=\angle DBK,$$
   以及
   $$\overline{DB}=\overline{BD},$$
   所以

$$\Delta BDL \cong \Delta DBK \ \text{(ASA 全等)}.$$

3. 再來考慮ΔBCM和ΔBIK全等的，以下是證明：

   因為

   $$\overline{BC} = \overline{BI} \ \text{(正方形 }BCHI\text{ 的邊)},$$

   且

   $$\angle BCM = 90^\circ = \angle BIK,$$

   又因為

   $$\angle CBM + \angle MBI = 90^\circ = \angle MBI + \angle IBK,$$

   所以

   $$\angle CBM = \angle IBK,$$

   因此

   $$\Delta BCM \cong \Delta BIK \ \text{(AAS 全等)}.$$

4. 其中ΔEDJ和ΔDBI亦為全等的直角三角形，以下給出證明：

   因為

   $$\overline{ED} = \overline{DB} \text{(正方形 }ABDE\text{ 的邊)},$$

   且

   $$\angle EJD = 90^\circ = \angle DIB,$$

   且因為

   $$\angle EDJ + \angle BDI = 90^\circ = \angle EDJ + \angle DEJ,$$

   所以

   $$\angle BDI = \angle DEJ,$$

   因此

   $$\Delta EDJ \cong \Delta DBI \text{ (AAS 全等)}.$$

5. 最後一組我們可以看出ΔELF和ΔDMH全等，以下給出證明：

   因為

   $$\begin{aligned} \overline{EF} &= \overline{EJ} - \overline{FJ} \\ &= \overline{DI} - \overline{HI} (\because \Delta EDJ \cong \Delta DBI) \\ &= \overline{DH}, \end{aligned}$$

   且

   $$\angle LEF = \angle MDH (\because \Delta EDJ \cong \Delta DBI),$$

   又

   $$\angle EFL = 90^\circ = \angle DHM,$$

   因此

   $$\Delta ELF \cong \Delta DMH \text{ (AAS 全等)}.$$

6. 利用以上五組三角形全等，再透過面積等式就可以推導出以下關係式：

$$
\begin{aligned}
\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BDL + ACLE \\
&= \Delta AGE + \Delta DBK + ACLE \\
&= \Delta AGE + \Delta DMH + \Delta BIK + HMBI + ACLE \\
&= \Delta AGE + \Delta EFL + ACLE + \Delta CMB + HMBI \\
&= \square ACFG + \square BCHI,
\end{aligned}
$$

此即為畢氏定理

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

【註與心得】

1. 來源：由 Fred. W. Martin，印第安納州南本德中心中學的學生給出的。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 254 號
2. 心得：先選擇性地以直角三角形三個邊作正方形，再以移動全等三角形的方式從大正方形去拼出兩個小正方形，對國、高中生來說都是容易看懂的。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●	●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。