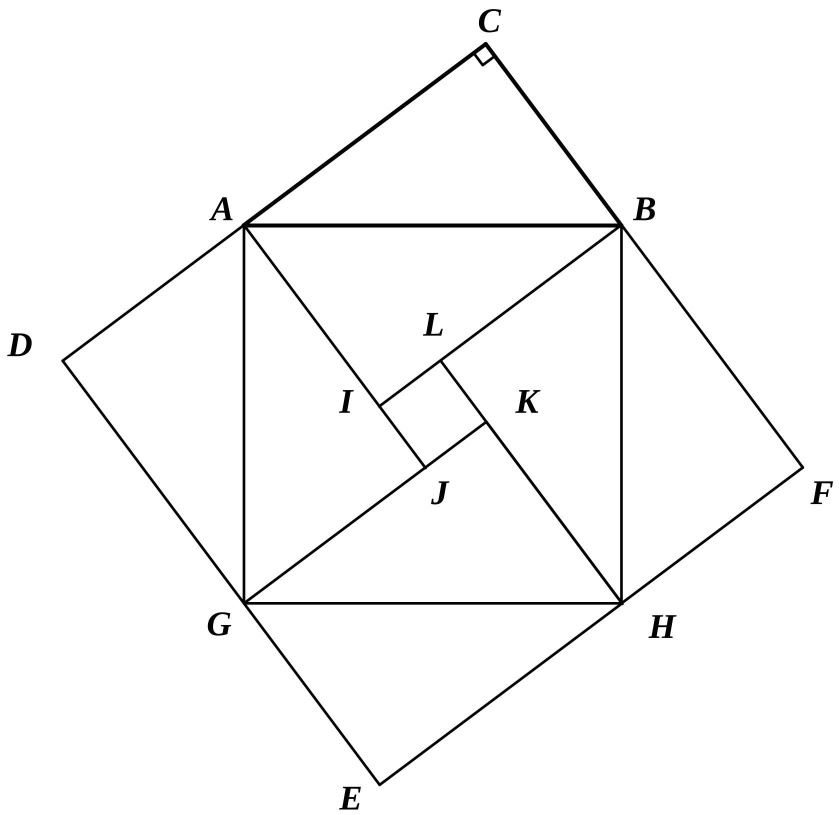
勾股定理證明-G253

【作輔助圖】

1. 直角三角形ΔABC作$\overline{CA}$延長線上一點D使$\overline{AD}=\overline{CB}$。
2. 以$\overline{CD}$為邊向下作正方形$CDEF$。
3. 過A作$\overline{AB}$垂直線，交$\overline{DE}$於G，過G作$\overline{AG}$垂直線，交$\overline{EF}$於H，連$\overline{HB}$。
4. 過A作$\overline{AC}$垂直線，過B作$\overline{CB}$垂直線，交於I；同理作出J,K,L。



【求證過程】

不難看出輔助圖中的幾個直角三角形全等，在給出證明之後，也可以得知四邊形$ABHG$是正方形。再利用大的正方形的面積的兩種算法，就可以整理得到畢氏定理關係式。

1. 不難看出$\Delta ABC\cong\Delta GAD\cong\Delta HGE\cong\Delta BHG$，以下我們給出證明：

   首先考慮$\Delta ABC\cong\Delta GAD$是因為

   $$\angle BCA=90^\circ=\angle ADG,$$

   且

   $$\overline{BC}=\overline{AD},$$

   又

   $$\angle CAB=90^\circ-\angle DAG=\angle DGA,$$

   所以

   $$\Delta ABC\cong\Delta GAD\,(\text{AAS 全等}).$$

   接著考慮$\Delta GAD\cong\Delta HGE$，以下是證明：

   因為

$$\angle GDA = 90^\circ = \angle HEG,$$

並且

$$\angle AGD = 90^\circ - \angle AGD = \angle HGE,$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \overline{CD} - \overline{CA} \\ &= \overline{DE} - \overline{DG} (\because \text{正方形} CDEF \text{以及} \Delta ABC \cong \Delta GAD) \\ &= \overline{GE},\end{aligned}$$

所以可以得到

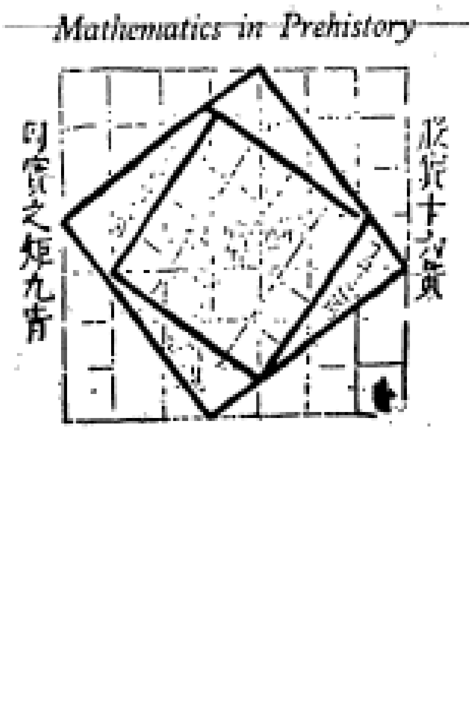
$$\Delta GAD \cong \Delta HGE \,(\text{ASA 全等}).$$

同理即可以證明 $\Delta HGE \cong \Delta BHG$ ，綜合以上就可以得到

$$\Delta ABC \cong \Delta GAD \cong \Delta HGE \cong \Delta BHG.$$

2. 不難看出四邊形 $ABHG$ 是正方形，以下我們給出證明：
   因為有上述的全等條件
   $$\Delta ABC \cong \Delta GAD \cong \Delta HGE \cong \Delta BHG,$$
   所以
   $$\overline{AB} = \overline{BH} = \overline{HG} = \overline{GA},$$
   又
   $$\angle BAG = \angle AGH = \angle GHB = \angle HBA = 90^\circ,$$
   所以有四邊都等長，四個角都直角得到四邊形 $ABHG$ 是正方形。

3. 接著由於大正方形的面積有兩個算法：
   $$\square CDEF = \overline{CD}^2 = \left(\overline{CA} + \overline{BC}\right)^2 = b^2 + a^2 + 2ab,$$
   $$\square CDEF = \square ABHG + 4 \times \Delta ABC = c^2 + 4 \times \left(\frac{1}{2}ab\right) = c^2 + 2ab,$$
   比較整理後可得
   $$c^2 = a^2 + b^2.$$
   此即為畢氏定理關係式。



【註與心得】

1. 來源：此證明是來自中國的證明，出自《周髀算經》，成書於公元前 1 世紀，記載公元前 11 世紀周公與商高的問答。上圖即為三國時代趙爽的《弦圖》。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 253 號
2. 心得：若是知道了這張圖及這個定理被知悉的年代，會令人好奇在千年之前的人們對數學的認識有著什麼樣的認識？在教學時只要給學生看看這張圖，順便談談這一段故事，順便談談中國數學與西方數學的差異，相信會有不錯的效果。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●

4. 補充：在數學能力指標中，有著這麼一項：
   C-R-04：能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。
   在距今二千至三千年前的東方人是這樣看勾股定理，有別於西方歐氏幾何體系所要求。由一個定理證明，一個例子就可以引起學生的好奇心，探索數學發展史中東方世界佔有什麼樣的角色。