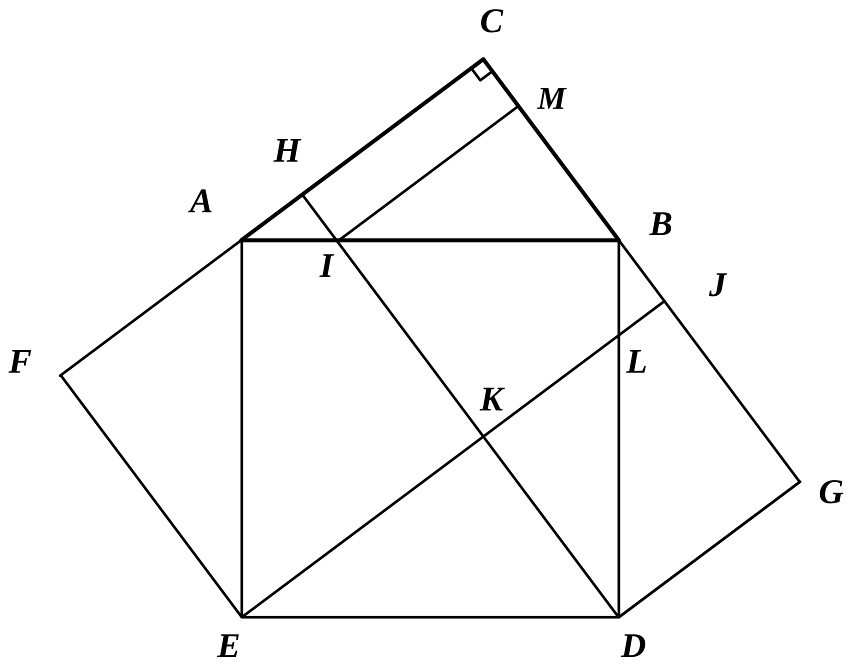
# 勾股定理證明-G252

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 $ABC$ 的 $\overline{AB}$ 為邊向外作正方形 $ABDE$ 。
2. 並過 $E$ 作垂 $\overline{CA}$ 直線交 $\overline{CA}$ 延伸線於 $F$ ；過 $D$ 作 $\overline{CB}$ 垂直線交 $\overline{CB}$ 延伸線於 $G$ ；過 $D$ 作 $\overline{CF}$ 垂直線交 $\overline{CF}$ 於 $H$ ，交 $\overline{AB}$ 於 $I$ ；過 $E$ 作 $\overline{CG}$ 垂直線交 $\overline{CG}$ 於 $J$ ，交 $\overline{DH}$ 於 $K$ ，交 $\overline{BD}$ 於 $L$ ；最後過 $I$ 作 $\overline{CB}$ 垂直線交 $\overline{CB}$ 於 $M$ 。




【求證過程】

不難發現輔助中有四個直角三角形是全等的直角三角形以及外也有兩個直角三角形全等，在給出證明之後，就可以透過大正方形面積可以拆成小正方形面積和的面積關係式推導，得到畢氏定理關係式。

1. 不難看出 $\Delta ABC$ 、 $\Delta EAF$ 、 $\Delta EDK$ 和 $\Delta BDG$ 是全等的直角三角形，以下我們給出證明：

   因為正方形 $ABDE$ ，所以有
   $$\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EA},$$
   且
   $$\angle ACB = \angle EFA = \angle DKE = \angle BGD = 90^\circ,$$
   以及
   $$\angle CAB = 90^\circ - \angle FAE = \angle FEA,$$
   也同理我們有 $\angle CAB = \angle FEA = \angle KED = \angle GBD,$
   因此
   $$\Delta ABC \cong \Delta EAF \cong \Delta EDK \cong \Delta BDG \text{ (AAS 全等)}.$$
2. 也不難看出 $\Delta AIH$ 和 $\Delta BLJ$ 全等，以下我們給出證明：

   因為
   $$\angle CAB = \angle GBD (\because \Delta ABC \cong \Delta BDG),$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{AH} &= \overline{AC}-\overline{HC}\\ &= \overline{BG}-\overline{JG}\\ &= \overline{BJ},\end{aligned}$$

以及

$$\angle AHI = 90^\circ = \angle BJL,$$

所以

$$\Delta AIH \cong \Delta BLJ \ \ (\text{AAS 全等}).$$

3. 接著考慮 $\Delta IBM$ 與 $\Delta DLK$ 全等，以下給出證明：
因為

$$\begin{aligned}\overline{MB} &= \overline{CB}-\overline{CM}\\ &= \overline{KJ}-\overline{LJ} (\because \Delta AIH \cong \Delta BLJ)\\ &= \overline{LK},\end{aligned}$$

且

$$\angle IMB = 90^\circ = \angle LKD,$$

以及

$$\overline{IM} = \overline{KD},$$

所以可以推得

$$\Delta IBM \cong \Delta DLK \ (\text{SAS 全等}).$$

4. 接著證明四邊形 $IBLK$ 及三角形 $BDG$ 面積相同：
因為 $\Delta IBD = \frac{1}{2}\square IMDB = \Delta IBM + \Delta BDG$ ，可以得到

$$\begin{aligned}IBLK &= \Delta IBD - \Delta KLD\\ &= (\Delta IBM + \Delta BDG) - \Delta KLD\\ &= \Delta BDG.\end{aligned}$$

5. 綜合以上可以得到：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= AIKE + \Delta EKD + \Delta DKL + IBLK\\ &= AIKE + \Delta AFE + \Delta DKL + \Delta BDG\\ &= AIKE + \Delta AFE + \Delta DKL + DGJL + \Delta BDL\\ &= (AIKE + \Delta AFE + \Delta AHI) + (\Delta DKL + DGJL)\\ &= \square EFHK + \square DKJG,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是作者 Loomis 在 1940 設計給出的。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 251 號
2. 心得：此證明中最大關鍵是證明其中一個四邊形面積會等於另一個三角形面積，

再用面積的等式來證明畢氏定理。在教學上要特別留意學生可能容易誤以為是要證明圖中的梯形全等。

3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| ● | | ● | | |

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。