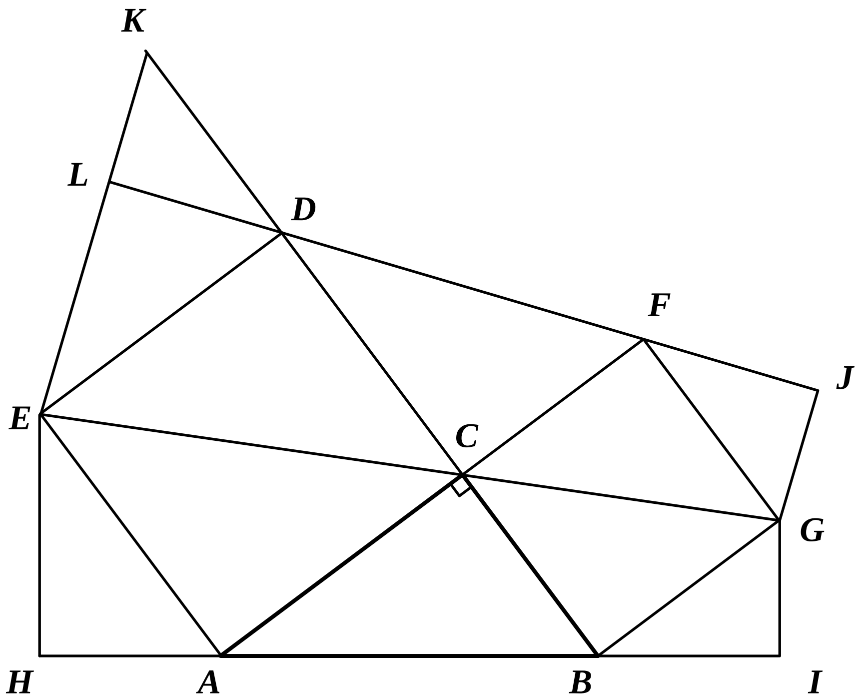
勾股定理證明-G251

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC},\overline{BC}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $ACDE$ 及正方形 $BCFG$。連 $\overline{DF}$、$\overline{EG}$。
2. 在 $\overline{BD}$ 延伸線上取一點 K 使 $\overline{DK}$ 與 $\overline{BC}$ 等長，並連 $\overline{EK}$。接著延伸 $\overline{FD}$ 與 $\overline{EK}$ 交於 L。
3. 在 $\overline{BA}$ 延伸線上取一點 H 使 $\overline{AH}$ 與 $\overline{DL}$ 等長，並連 $\overline{DE}$。接著在 $\overline{AB}$ 延伸線上取一點 I 使 $\overline{BI}$ 與 $\overline{DL}$ 等長，並連 $\overline{IG}$。最後在 $\overline{DF}$ 延伸線上取一點 J 使 $\overline{FJ}$ 與 $\overline{DL}$ 等長，並連 $\overline{JG}$。



【求證過程】

先作適當的輔助線將直角三角形 ABC 及其兩股上的正方形包進兩個梯形中。我們可以看到這兩個梯形是由兩個正方形及六個直角三角形所組成，而其中，左右的兩個直角三角形可以拼成與中間一樣的較大的直角三角形。接著如果我們去計算兩個梯形的面積，就會發現上底加下底為直角三角形的斜邊長，而高是斜邊長加上以斜邊為底的高。因此分配律展開後可以得到的就是斜邊自乘，加上四個直角三角形面積。其中斜邊自乘就可以看成是大的正方形面積，也就證明了畢氏定理關係式。

1. 不難看出 $\Delta ABC,\Delta DFC,\Delta EKD$ 為全等三角形，以下給出證明：

   其中 $\Delta ABC,\Delta DFC$ 的全等是因為

$$\overline{CA}=\overline{CD}(\because \text{正方形的邊}),$$

   並且

$$\overline{CB}=\overline{CF}(\because \text{正方形的邊}),$$

   以及

$$\angle ACB=90^\circ=\angle DCF,$$

   所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DFC \text{ (SAS 全等)}.$$

另一組 $\Delta ABC, \Delta EKD$ 的全等是因為

$$\overline{AC} = \overline{DE} (\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{DE} = \overline{BC},$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle EDK,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EKD \text{ (SAS 全等)}.$$

因此可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta DFC \cong \Delta EKD.$$

2. 而 $\Delta DKL, \Delta FGJ, \Delta BGI$ 為全等三角形，以下是證明：
   其中 $\Delta BGI, \Delta FGJ$ 的全等是因為

$$\overline{GB} = \overline{GF} (\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{BI} = \overline{LD} = \overline{FJ},$$

以及

$$\begin{aligned} \angle GBI &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle CFD (\because \Delta ABC \cong \Delta DFC) \\ &= \angle GFJ, \end{aligned}$$

所以

$$\Delta BGI \cong \Delta FGJ \text{ (SAS 全等)}.$$

另一組考慮 $\Delta BGI, \Delta EDL$ 亦為全等三角形，是因為

$$\overline{BI} = \overline{LD},$$

並且

$$\overline{DK} = \overline{BC} = \overline{BG} (\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\begin{aligned} \angle GBI &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= \angle CAB \\ &= \angle CDF (\because \Delta ABC \cong \Delta DFC) \\ &= \angle KDL \ (\because \text{對頂角相等}), \end{aligned}$$

所以

$$\Delta BGI \cong \Delta EDL \text{ (SAS 全等)}.$$

因此可以推得

$$\Delta DKL \cong \Delta FGJ \cong \Delta BGI.$$

3. 可以看出 $\Delta EDL, \Delta EAH$ 為全等三角形，以下是證明：
   因為

$$\overline{ED} = \overline{EA} (\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{DL}=\overline{HA},$$

以及

$$\begin{aligned}\angle LDE &= 90^\circ-\angle FDC\\ &= 90^\circ-\angle BAC\,(\because \Delta ABC\cong\Delta DFC)\\ &= \angle HAE,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta EDL\cong\Delta EAH\ (\text{SAS 全等}).$$

4. 綜合以上，我們可以推導面積關係式：

$$\begin{aligned}&\square ACDE+\square BCFG+4\times\Delta EKD\\ &=\square ACDE+\square BCFG+\Delta ABC+\Delta DFC+\Delta EDL+\Delta EAH+\Delta FGJ+\Delta BGI\\ &=\text{六邊形}LEHIGJ\\ &=\text{梯形}LEGJ+\text{梯形}HEGI\end{aligned}$$

接著以梯形面積公式計算推導, 可得

$$\begin{aligned}&\text{梯形}LEGJ+\text{梯形}HEGI\\ &=\frac{1}{2}\left[(\overline{JG}+\overline{LE})\times\overline{LJ}\right]+\frac{1}{2}\left[(\overline{EH}+\overline{GI})\times\overline{HI}\right],\end{aligned}$$

然後繼續整理,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[(\overline{JG}+\overline{LE})\times\overline{LJ}\right]+\frac{1}{2}\left[(\overline{EH}+\overline{GI})\times\overline{HI}\right],\\ &=(\overline{JG}+\overline{LE})\times\overline{LJ}\\ &=(\overline{KL}+\overline{LE})\times(\overline{LD}+\overline{DF}+\overline{FJ})\\ &=(\overline{KE})\times(\overline{DF}+2\times\overline{LD})\\ &=\overline{KD}\times\overline{DF}+2\times\overline{KE}\times\overline{LD}\\ &=\overline{AB}^2+4\cdot(\frac{1}{2}\times\overline{KE}\times\overline{LD})\\ &=\overline{AB}\text{為邊的正方形面積}+4\times\Delta EDK,\end{aligned}$$

因此

$$\square ACDE+\square BCFG=\overline{AB}\text{為邊的正方形面積},$$

此即為畢氏定理關係式

$$a^2+b^2=c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明同樣來自高中生 Joseph Zelson, 他將證明過程於 1939 年寄給了 Loomis。而 Loomis 將這個證明記載於他的《勾股定理》一書中幾何篇的編號第 251 號。
2. 心得：這個證明過程將一個六邊形可以視為兩個梯形及兩個正方形加上四個六個三角形，透過梯形面積公式及簡單的代數運算技巧就可以得證。也可惜了

不像拼片的幾何證明方式這麼直觀，要透過梯形面積公式來做轉換，也沒有顯而易見的大正方形於圖形中，在教學上將提升難度。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。