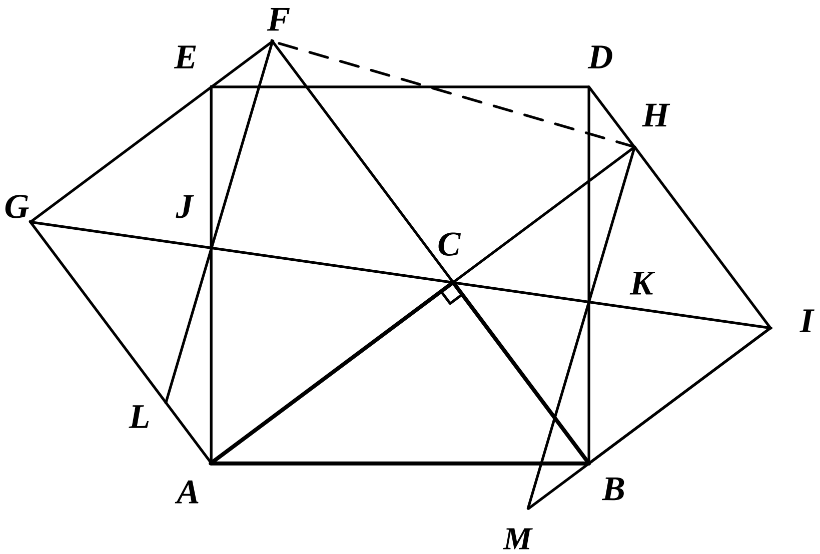
勾股定理證明-G250

【作輔助圖】

1. 以ΔABC的$\overline{AB}$為邊，向內作正方形$ABDE$；再分別以$\overline{AC}$及$\overline{BC}$為邊，向外作正方形$ABFG$及正方形$BCHI$。其中我們將會說明E會落在$\overline{FG}$線段上，且$I-H-D$共線。
2. 連$\overline{GC}$及$\overline{CI}$，分別交$\overline{AE}$於J，交$\overline{BD}$於K。
3. 接著連接$\overline{FJ}$並延伸交$\overline{GA}$於L，連接$\overline{HK}$並延伸至M，使得$\overline{FL}=\overline{HM}$。最後連接$\overline{FH}$。



【求證過程】

在作完輔助圖後，我們不難看出ΔABC與另外六個直角三角形全等，在給出證明之後。我們將兩個小正方形面積視為是包含它們的六邊形扣掉兩個直角三角形，再將六邊形拆解，可以重新拼湊出大正方形，也就證明了畢氏定理的關係式。

1. 不難看出$\Delta ABC, \Delta AEG, \Delta DBI, \Delta FHC$為全等的三角形，以下給出證明：
   其中$\Delta ABC, \Delta AEG$是因為
   $$\overline{AB}=\overline{EA}(\because \text{正方形的邊}),$$
   並且
   $$\angle CAB = 90^\circ - \angle EAC = \angle GAE,$$
   以及
   $$\overline{AC}=\overline{AG}(\because \text{正方形的邊}),$$
   所以
   $$\Delta ABC \cong \Delta AEG\,(\text{SAS 全等}).$$
   另一組考慮$\Delta ABC, \Delta DBI$的全等, 因為
   $$\overline{AB}=\overline{BD}(\because \text{正方形的邊}),$$
   並且
   $$\angle CBA = 90^\circ - \angle DBC = \angle DBI,$$
   以及

$$\overline{BC}=\overline{BI}(\because \text{正方形的邊}),$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta DBI\ (\text{SAS 全等}).$$

接著考慮 $\Delta ABC,\Delta FHC$ 的全等, 因為

$$\overline{AC}=\overline{FC}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{BC}=\overline{HC}(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle ACB=90^\circ=\angle FCH,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta FHC\ (\text{SAS 全等}).$$

綜合以上可得此結論

$$\Delta ABC\cong\Delta AEG\cong\Delta DBI\cong\Delta FHC.$$

2. 也不難發現 $\Delta GJA,\Delta GJF$ 為全等的三角形，以下給個證明：
   因為

$$\overline{GJ}=\overline{GJ}\ (\text{共用邊}),$$

   並且

$$\overline{GA}=\overline{GF}(\because \text{正方形的邊}),$$

   以及

$$\angle AGJ=45^\circ=\angle FGJ,$$

   所以

$$\Delta GJA\cong\Delta GJF\ (\text{SAS 全等}).$$

3. 我們也可以證明 $\Delta BIK,\Delta HIK$ 為全等三角形：
   因為

$$\overline{KI}=\overline{KI}\ (\text{共用邊}),$$

   並且

$$\overline{BI}=\overline{HI}(\because \text{正方形的邊}),$$

   以及

$$\angle BIK=45^\circ=\angle HIK,$$

   所以

$$\Delta BIK\cong\Delta HIK\ \ (\text{SAS 全等}).$$

4. 可以看出 $\Delta FLG,\Delta AEG,\Delta DBI,\Delta MHI$ 亦為全等的三角形，以下是證明：
   其中 $\Delta FLG\cong\Delta AEG$ 的全等是因為

$$\overline{GF}=\overline{GA}(\because \text{正方形的邊}),$$

   並且

$$\angle GFL=\angle GAE(\because \Delta GJF\cong\Delta GJA),$$

   以及

$$\angle FGL=90^\circ=\angle EGA(\text{共用角}),$$

   所以

$$\Delta AEG \cong \Delta FLG \text{ (ASA 全等)}$$

另外一個組合 $\Delta DBI, \Delta MHI$ 是因為：

$$\overline{BI} = \overline{HI} (\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\angle DBI = \angle MHI (\because \Delta BIK \cong \Delta HIK),$$

以及

$$\angle BID = \angle HIM \text{ (共用角)},$$

所以

$$\Delta DBI \cong \Delta MHI.$$

綜合以上我們知道

$$\Delta FLG \cong \Delta AEG \cong \Delta DBI \cong \Delta MHI,$$

因此我們有

$$\overline{HM} = \overline{FL} = \overline{DB} (\because \Delta FLG \cong \Delta DBI).$$

5. 可以從輔助圖上看到 $G-E-F$ 共線及 $I-H-D$ 共線，在這裡給個證明：
因為

$$\angle AGE = 90^\circ = \angle AGF,$$

所以

$$G-E-F \text{ 三點共線.}$$

另一方面, 因為

$$\angle BIH = 90^\circ = \angle BID,$$

所以

$$I-H-D \text{ 三點共線.}$$

6. 考慮 $\Delta GEJ, \Delta IHK$ 為全等的三角形，以下給個證明：
因為

$$\overline{GE} = \overline{IH} (\because \Delta AEG \cong \Delta MHI),$$

並且

$$\angle GEJ = \angle IHK (\because \Delta AEG \cong \Delta MHI),$$

以及

$$\angle EGJ = 45^\circ = \angle HIK,$$

所以

$$\Delta GEJ \cong \Delta IHK \text{ (SAS 全等).}$$

$$\Delta FEJ \cong \Delta DHK.$$

7. 其中 $\Delta FEJ, \Delta DHK$ 亦為全等的三角形，以下是它的證明：
因為

$$\angle EFJ = \angle HDK (\because \Delta FLG \cong \Delta DBI),$$

並且

$$\begin{aligned}\angle FEJ &= 180^\circ - \angle GEA \\ &= 180^\circ - \angle IHM (\because \Delta AEG \cong \Delta MHI) \\ &= \angle DHK,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{EF} &= \overline{GF} - \overline{GE} \\ &= \overline{ID} - \overline{IH} (\because \Delta AEG \cong \Delta ELG \cong \Delta DBI \cong \Delta MHI) \\ &= \overline{DH},\end{aligned}$$

所以

$$\Delta FEJ \cong \Delta DHK \text{ (ASA 全等)}.$$

8. 接著我們就可以推導面積關係式如下：

$$\begin{aligned}\square ACFG + \square BCHI &= \text{六邊形}FGABIH - \Delta FCH - \Delta ABC \\ &= \text{六邊形}FGABIH - 2\Delta ABC \\ &= \text{梯形}FJKH + \text{梯形}JABK + \Delta FEJ + \Delta EAG + \text{四邊形}KBIH - 2\Delta ABC \\ &= \text{梯形}FJKH + \text{梯形}JABK + \Delta EAG + (\Delta DHK + \text{四邊形}KBIH) - 2\Delta ABC \\ &= \text{梯形}FJKH + \text{梯形}JABK \\ &= \square ABDE,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明由 Joseph Zelson 於 1939 年寄給作者，收錄在《勾股定理》一書中的幾何篇編號第 250 號。
2. 心得：此證明的過程作的輔助線相對是比較特別的，也用到了梯形面積公式以及一些代數運算規則，在教學是相對較複雜的選擇。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●				

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。