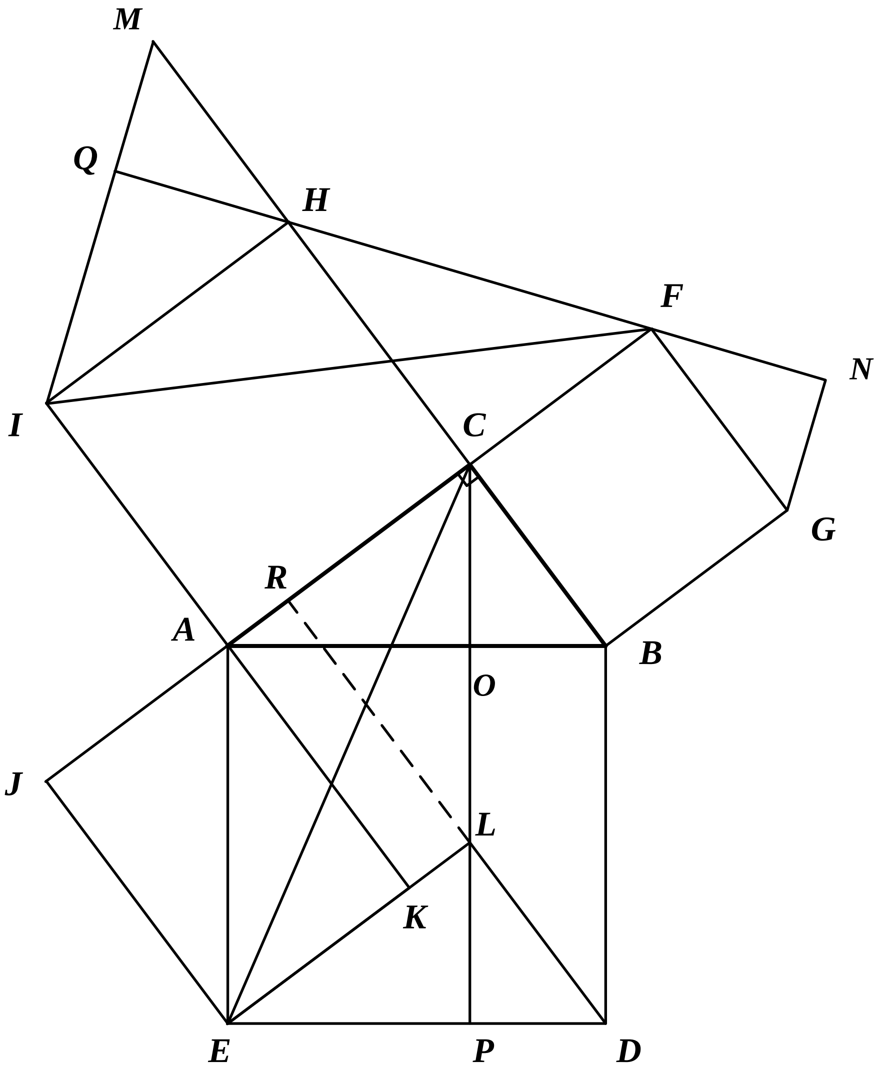
勾股定理證明-G249

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的三邊為正方形的邊，向外作正方形 $ABDE$ 、正方形 $BCFG$ 及正方形 $ACHI$ 。
2. 在 $\overline{CA}$ 延伸線上取一點 J 使得 $\overline{AJ}$ 與 $\overline{BC}$ 等長，並連 $\overline{JE}$ 。
3. 過 E 作 $\overline{JE}$ 的垂直線，並在線上取一點 L 使得 $\overline{EL}$ 與 $\overline{AC}$ 等長，連 $\overline{LD}$ 。並延伸 $\overline{IA}$ 與 $\overline{LE}$ 交於 K 。
4. 在 $\overline{CH}$ 延伸線上取一點 M 使得 $\overline{HM}$ 與 $\overline{BC}$ 等長，連 $\overline{MI}$ 。
5. 連 $\overline{FH}$ ，並延伸 $\overline{FH}$ 與 $\overline{MI}$ 相交於 Q 。再延伸 $\overline{HF}$ ，並在其延伸線上取一點 N 使得 $\overline{FN}$ 與 $\overline{HQ}$ 等長，連 $\overline{NG}$ 。
6. 接著連 $\overline{CL}$ ，並延伸 $\overline{CL}$ 與 $\overline{AB}$ 及 $\overline{ED}$ 分別交於 O 及 P 。最後延伸 $\overline{DL}$ 與 $\overline{CJ}$ 交於 R 。



【求證過程】

先以適當的輔助線將直角三角形 ABC 及三邊上的正方形包進五邊形 $BCJED$ 及六邊形 $ACBGNQI$ 中。其中這個五邊形面積與六邊形面積是相等的。並且五邊形面積為大正方形面積加上兩個直角三角形，而六邊形面積則為兩個小正方形面積加上兩個同樣的直角三角形面積，因此可以證明出大正方形面積為兩個小正方形面積的和，也就

是畢氏定理的關係式。

1. 可以從圖中看出$\Delta ABC, \Delta IMH, \Delta HFC, \Delta EAJ, \Delta AEK, \Delta EDL$為全等的直角三角形，以下我們給出它們的證明：
其中$\Delta ABC, \Delta EAJ$是因為
$$\overline{AB} = \overline{AE} (\because \text{正方形的邊}),$$
並且
$$\overline{AJ} = \overline{BC},$$
以及
$$\angle CBA = 90^\circ - \angle CAB = \angle JAE,$$
所以
$$\Delta ABC \cong \Delta EAJ \text{ (SAS 全等)}.$$

再來看$\Delta ABC, \Delta EDL$這一組，是因為
$$\overline{AB} = \overline{ED} (\because \text{正方形的邊}),$$
並且
$$\overline{AC} = \overline{EL},$$
以及
$$\begin{aligned} \angle CAB &= \angle AEJ \, (\because \Delta ABC \cong \Delta EAJ) \\ &= 90^\circ - \angle AEL \\ &= \angle LED, \end{aligned}$$
所以
$$\Delta ABC \cong \Delta EDL \text{ (SAS 全等)}.$$
下一組是$\Delta ABC, \Delta IMH$, 因為
$$\overline{AC} = \overline{IH} (\because \text{正方形的邊}),$$
並且
$$\overline{CB} = \overline{HM},$$
以及
$$\angle ACB = 90^\circ = \angle IHM,$$
所以
$$\Delta ABC \cong \Delta IMH \text{ (SAS 全等)}.$$
再下一組是$\Delta ABC, \Delta HFC$, 因為
$$\overline{CA} = \overline{CH} (\because \text{正方形的邊}),$$
並且
$$\overline{CB} = \overline{CF} (\because \text{正方形的邊}),$$
以及
$$\angle ACB = 90^\circ = \angle HCF,$$
所以
$$\Delta ABC \cong \Delta HFC \text{ (SAS 全等)}.$$

接著考慮$\Delta ABC, \Delta AEK$的全等：
因為

$$\overline{AB} = \overline{AE} (\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle BAK = \angle EAK,$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle AKE,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta AEK \text{ (AAS 全等)}.$$

2. 我們也可以證明$\Delta CEJ, \Delta FIA$為全等三角形：
其中因為

$$\begin{aligned}\overline{IA} &= \overline{AC} (\because \text{正方形的邊}) \\ &= \overline{EJ}\ (\because \Delta ABC \cong \Delta EAJ),\end{aligned}$$

並且

$$\angle FAI = 90^\circ = \angle CJE,$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{CJ} &= \overline{CA} + \overline{AJ} \\ &= \overline{AC} + \overline{CF} (\because \Delta EAJ \cong \Delta HFC) \\ &= \overline{AF},\end{aligned}$$

所以有

$$\Delta CEJ \cong \Delta FIA \text{ (SAS 全等)}.$$

3. 而因為$\overline{AC} = \overline{EL} (\because \Delta ABC \cong \Delta EDL)$且$\overline{AC}$平行於$\overline{EL}$, 所以四邊形$ACLE$為平行四邊形, 故有$\overline{AE}$與$\overline{CL}$平行且等長. 而因為$\overline{AE}$與$\overline{CL}$平行且等長, 且$\overline{AE}, \overline{BD}$亦為平行且等長, 則$\overline{CL}, \overline{BD}$也是行平且等長. 所以四邊形$BCLD$是平行四邊形. 因為$\overline{CP}$平行於$\overline{BD}$, 所以

$$\begin{aligned}\angle CPD &= 180^\circ - \angle BDP\ (\because \text{同側內角互補}) \\ &= 180^\circ - 90^\circ \\ &= 90^\circ.\end{aligned}$$

4. 同樣地可以看出$\Delta HMQ, \Delta FGN, \Delta LDP$三個三角形也是全等的三角形，以下是證明：
其中$\Delta HMQ, \Delta FGN$是因為

$$\overline{HQ} = \overline{FN},$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{FG} &= \overline{BC} (\because \text{正方形的邊}) \\ &= \overline{HM},\end{aligned}$$

以及

$$\angle MHQ = \angle FHC (\because \text{對頂角相等})$$
$$= 90^\circ - \angle HFC$$
$$= \angle GFN,$$

所以

$$\Delta HMQ \cong \Delta FGN \text{ (SAS 全等).}$$

另一組$\Delta HMQ, \Delta LDP$則是因為

$$\overline{HM} = \overline{LD},$$

並且

$$\angle HMQ = \angle LDP (\because \Delta IMH \cong \Delta EDL),$$

以及

$$\angle HQM = 90^\circ = \angle LPD,$$

所以

$$\Delta HMQ \cong \Delta LDP \text{ (AAS 全等).}$$

5. 考慮$\Delta FIQ, \Delta CEP$亦為全等的三角形，同樣地給出它的證明：
其中因為

$$\overline{FI} = \overline{CE} (\because \Delta FIA \cong \Delta CEJ),$$

並且

$$\angle CPE = 90^\circ = \angle FQI,$$

以及

$$\overline{FQ} = \overline{FH} + \overline{HQ}$$
$$= \overline{AE} + \overline{LP} (\because \Delta HFC \cong \Delta AEK \text{且} \Delta HMQ \cong \Delta LDP)$$
$$= \overline{CL} + \overline{LP} (\because \text{平行四邊形} ACLE)$$
$$= \overline{CP},$$

所以

$$\Delta FIQ \cong \Delta CEP \text{ (RHS 全等).}$$

6. 所以就可以證明正方形$BCFG$面積等於平行四邊形$BCLD$面積：
其中因為

$$\square BCFG = \overline{BC} \times \overline{BC},$$

又有

$$\square BCLD = \overline{BC} \times \overline{CR},$$

而其中

$$\overline{CR} = \overline{CJ} - \overline{RJ}$$
$$= \overline{CJ} - \overline{CA} (\because \text{四邊形} ELRJ \text{為正方形})$$
$$= \overline{AJ}$$
$$= \overline{BC},$$

所以

$$\text{▱}BCLD = \square BCFG.$$

7. 最後我們推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \text{五邊形}CBDEJ - \Delta EAJ - \Delta ABC\\ &= (\Delta CEJ + \Delta CEP + \text{▱}BCLD + \Delta LDP) - \Delta EAJ - \Delta ABC\\ &= (\Delta FIA + \Delta FIQ + \square BCFG + \Delta FGN) - \Delta EAJ - \Delta ABC\\ &= \text{四邊形}AFQI + \square BCFG + \Delta FGN - \Delta EAJ - \Delta ABC\\ &= \square ACHI + \square BCFG + \Delta HFC + \Delta IHQ + \Delta FGN - \Delta EAJ - \Delta ABC\\ &= \square ACHI + \square BCFG,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自 Joseph Zelson 在 1939 年交給 Loomis，而 Loomis 也將它放在《勾股定理》一書中的幾何篇的編號第 249 號。
2. 心得：此證明使用到的是面積的割補證法，證明由斜邊上的正方形面積等於兩股上的正方形面積之和，這證明的作者 Joseph 多採用這樣的方式來證明畢氏定理。我們看這次的過程當中的缺點同樣在於沒有完全使用全等的拼片以拼圖式證明來說明面積的等式，其中一處用到了平行四邊形與正方形面積的相等。若我們在另一邊的平行四邊形與正方形面積上也做了同理地證明相等後，事實上就可以更直接地得到面積等式。這種證明方式的不一致性在教學上我想應該要避免以免學生有理解上的困難。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●			

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。