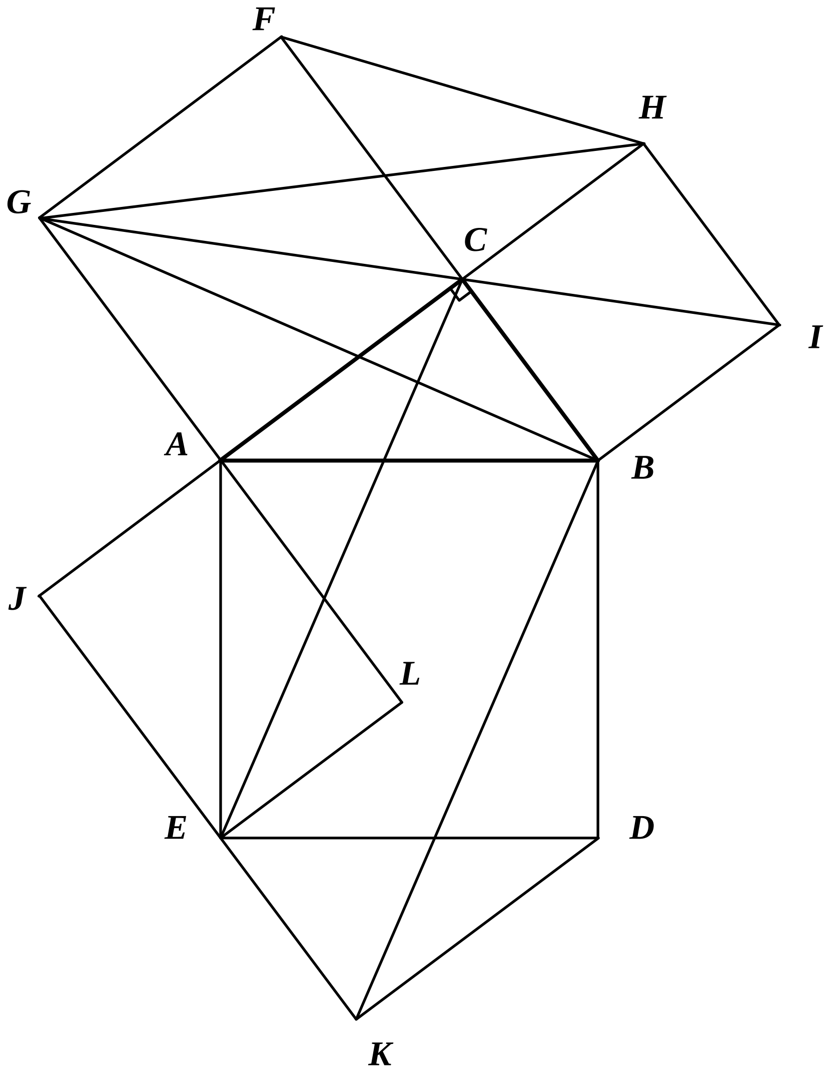
勾股定理證明-G248

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的三邊為正方形一邊，向外作正方形 $ABDE$, $ACFH$ 及 $BCHI$ ，並連 $\overline{HF}, \overline{HG}, \overline{BG}, \overline{IG}$ 以及 $\overline{EC}$ 。
2. 在 $\overline{CA}$ 延伸線上取一點 J ，使得 $\overline{AJ}$ 與 $\overline{BC}$ 等長，並連 $\overline{JE}$ 。
3. 在 $\overline{JE}$ 延伸線上取一點 K ，使得 $\overline{EK}$ 與 $\overline{BC}$ 等長，並連 $\overline{KD}$, $\overline{BK}$ 及 $\overline{CK}$ 。



【求證過程】

先在直角三角形的三邊上向外作出三個正方形，並作輔助線將圖形切割及延長，如圖所示。其中我們先將大塊的正方形加上兩塊全等的直角三角形所形成的六邊形以另一種方式切成四塊，而這四塊剛好可以拼出以兩個較小正方形及兩個全等直角三角形組合的六邊形。透過全等的方式證明拼片面積對應相等，最後再以等量原理得到面關係式，也就是畢氏定理關係式。

1. 不難看出 $\Delta ABC, \Delta EAJ, \Delta DEK, \Delta FHC$ 為全等三角形，以下我們給出證明：
   其中 $\Delta ABC, \Delta EAJ$ 是因為

$$\overline{BC} = \overline{AJ},$$

並且

$$\overline{AB}=\overline{AE}\ (\text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle CBA=90^{\circ}-\angle CAB=\angle EAJ,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta EAJ\ (\text{SAS 全等}).$$

另一組考慮$\Delta ABC,\Delta DEK$是因為

$$\overline{AB}=\overline{DE}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{EK}=\overline{BC},$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA&=\angle JAE(\because \Delta ABC\cong\Delta EAJ)\\&=90^{\circ}-\angle AEJ\\&=\angle DEK,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta DEK\ (\text{SAS 全等}).$$

還有一組$\Delta ABC,\Delta FHC$是因為

$$\overline{CA}=\overline{CF}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{CB}=\overline{CH}(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle ACB=90^{\circ}=\angle FCH,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta FHC\ (\text{SAS 全等}).$$

因此有$\Delta ABC\cong\Delta EAJ\cong\Delta DEK\cong\Delta FHC.$

2. 另外$\Delta CAE,\Delta GAB,\Delta GFH,\Delta KDB$亦為全等的三角形，在這裡給出它們的證明：
其中$\Delta CAE,\Delta GAB$是因為

$$\overline{AE}=\overline{AB}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{AC}=\overline{AG}(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle CAE=90^{\circ}+\angle CAB=\angle GAB,$$

所以

$$\Delta CAE\cong\Delta GAB\ (\text{SAS 全等}).$$

另一組$\Delta CAE,\Delta KDB$是因為

$$\overline{AC}=\overline{DK}(\because \Delta ABC\cong\Delta DEK),$$

並且

$$\overline{AE}=\overline{BD}(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CAE&=90^\circ+\angle CAB\\&=90^\circ+\angle KDE(\because \Delta ABC\cong\Delta DEK)\\&=\angle KDB,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta CAE\cong\Delta KDB\,(\text{SAS 全等}).$$

還有一組$\Delta GAB,\Delta GFH$是因為

$$\overline{AG}=\overline{FG}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{AB}=\overline{FH}(\because \Delta ABC\cong\Delta FHC),$$

以及

$$\begin{aligned}\angle GAB&=90^\circ+\angle CAB\\&=90^\circ+\angle CFH(\because \Delta ABC\cong\Delta FHC)\\&=\angle GFH,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta GAB\cong\Delta GFH\,(\text{SAS 全等}).$$

也就是$\Delta CAE\cong\Delta GAB\cong\Delta GFH\cong\Delta KDB.$

3. 最後我們考慮$\Delta CEK,\Delta KCB,\Delta GIB,\Delta GIH$為全等的三角形，同樣地給出證明：
其中$\Delta GIB,\Delta GIH$是因為

$$\overline{GI}=\overline{GI}\,(\text{共用邊}),$$

並且

$$\overline{BI}=\overline{HI}\,(\text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle BIG=45^\circ=\angle HIG,$$

所以

$$\Delta GIB\cong\Delta GIH\,(\text{SAS 全等}).$$

接著考慮$\Delta GIB,\Delta CKE$是因為

$$\begin{aligned}\overline{BI}&=\overline{BC}(\because \text{正方形的邊})\\&=\overline{EK}(\because \Delta ABC\cong\Delta DEK),\end{aligned}$$

並且

$$\overline{BG}=\overline{EC}(\because \Delta CAE\cong\Delta GAB),$$

以及

$$\angle BIG=45^\circ=\angle EKC(\because \Delta CJK\text{為等腰直角三角形}),$$

所以

$$\Delta GIB\cong\Delta CKE\ \ (\text{SAS 全等}).$$

再考慮　是因為

$$\overline{BC}=\overline{BI}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{KC} = \overline{IG} (\because \Delta GIB \cong \Delta CKE),$$

以及

$$\angle BIG = 45^\circ = 90^\circ - \angle KCJ = \angle BCK,$$

所以

$$\Delta GIB \cong \Delta KCB \,(\text{SAS 全等}).$$

也就是$\Delta CEK \cong \Delta KCB \cong \Delta GIB \cong \Delta GIH$.

4. 綜合以上我們可以推導以下面積關係式：

$$\begin{aligned}\Delta ABC + \square ABDE + \Delta DEK &= \text{六邊形} ACBDKE \\ &= \Delta CAE + \text{▱} BCEK + \Delta KDB \\ &= \Delta GAB + \text{四邊形} BGHI + \Delta GFH \\ &= \text{六邊形} ABIHFG \\ &= \square ACFG + \square BCHI + \Delta ABC + \Delta FHC,\end{aligned}$$

再透過等量原理可以得到

$$\square ABDE = \square ACFG + \square BCHI,$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自一名高中生 Joseph Zelson 原創，在 1939 年交給 Loomis，記載於《勾股定理》的幾何篇編號第 248 號。
2. 心得：同樣是推導正方形面積的等式，有一類的證明方式是先把週遭幾個三角形一起加進來考慮分割，最後會變成兩個小正方形加上同樣面積的分割圖形。透過等量公理就可以得到面積關係式。而這一個證明方式就是其中之一，有點像是我們化學反應中的催化劑，過程或許參與了反應，但產物與催化劑是無關的，可以加速得到我們想要的結果。我們可以透過這一個證明方式，讓學生接觸這樣的想法在證明中的實際狀況。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。