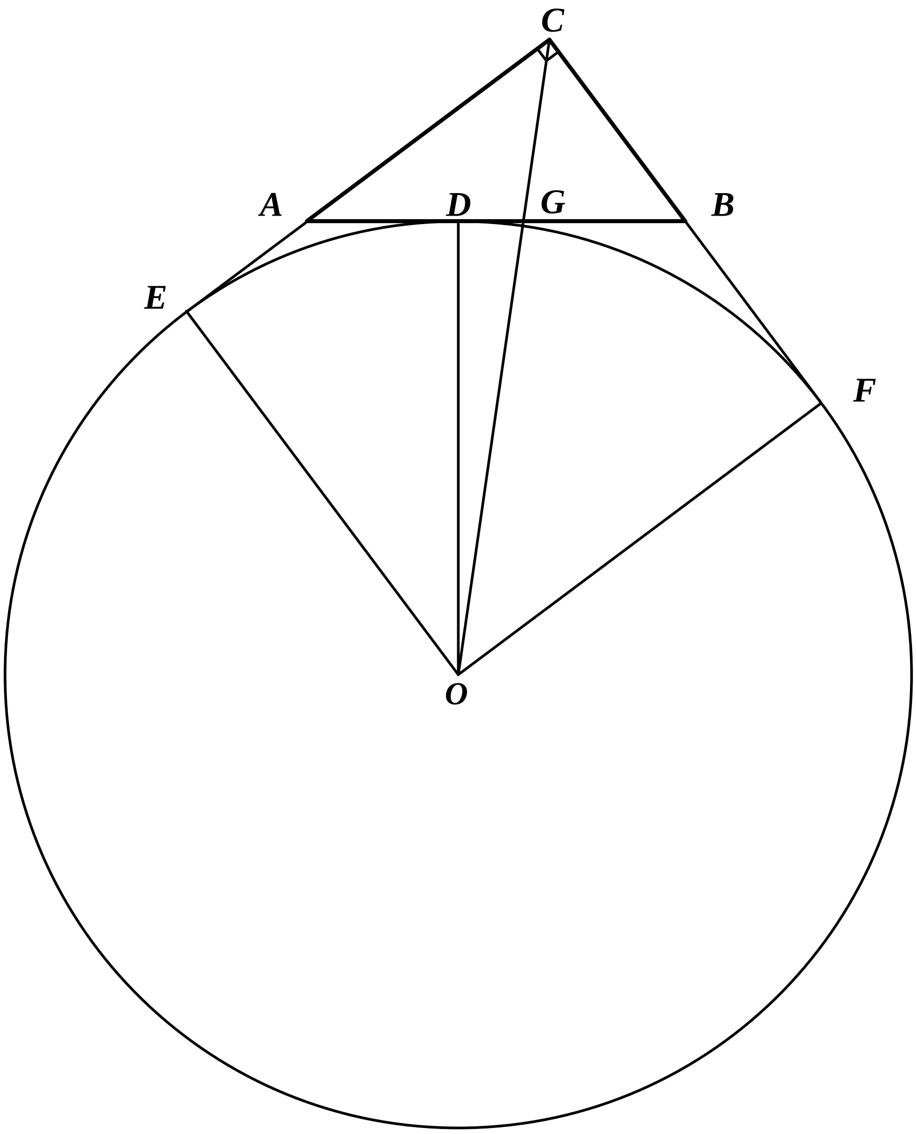
勾股定理證明-G246

【作輔助圖】

1. 延伸$\overline{CA}$、$\overline{CB}$，然後作直角三角形ABC的旁切圓，圓心O，並與$\overline{AB}$切於D，與$\overline{CA}$、$\overline{CB}$分別與圓O切於E、F。
2. 連$\overline{OC}$與$\overline{AB}$交於G。
3. 連$\overline{OE}$、$\overline{OF}$。



【求證過程】

利用旁切圓及兩切線段長相等性質，再以兩種方法求正方形$CEOF$面積所得的面積等式，透過一些代數運算性質，即可推得畢氏定理關係式。

1. 先由切線長性質得到$\overline{AD}=\overline{AE}$及$\overline{BD}=\overline{BF}$
2. 接著分析面積：

   令圓O的半徑為r，$\overline{AB}=c,\overline{AC}=b$且$\overline{BC}=a$，

   則$\Delta OAE=\Delta OAD=\dfrac{1}{2}\overline{AD}\times r$且$\Delta OBD=\Delta OBF=\dfrac{1}{2}\overline{BG}\times r.$

3. 考慮正方形 $CEOF$ 面積：

$$\square CEOF = 2\times(\Delta OAD) + 2\times(\Delta ODB) + \Delta ABC$$
$$= r\times\overline{DA} + r\times\overline{DB} + \frac{1}{2}ab$$
$$= r\times c + \frac{1}{2}ab.$$

4. 接著推導周長跟圓半徑關係式：

$$c+a+b = \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}$$
$$= \overline{AD}+\overline{DB}+\overline{BC}+\overline{AC}$$
$$= (\overline{AC}+\overline{AE})+(\overline{BC}+\overline{BF})$$
$$= \overline{CE}+\overline{CF}$$
$$= 2r$$

5. 再綜合以上由正方形 $CEOF$ 面積的兩種算法：

$$\square CEOF = r^2 = \frac{1}{2}ab + c\times r = \square CEOF,$$

也就是

$$\frac{1}{4}(a+b+c)^2 = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c\times(a+b+c),$$

再整理出

$$\frac{1}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right) = \frac{1}{2}c^2,$$

最後移項可得

$$c^2 = a^2+b^2.$$

此即為畢氏定理關係式。

【註與心得】

1. 來源：此證明是 B. F. Yanney，Wooster University 的教授所證。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 246 號
2. 心得：這個證明很特別地使用到了圓形，使證明增加了不少美感。其中用到了圓的切線段性質，以及旁切圓半徑的計算方法。再透過簡單的代數處理，就可以得證。在中學教學時也算是個複習圓的特性的好時機。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		●

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：
S-4-17 ：能理解圓的幾何性質。

在這個證明中，輔助線的選擇上是非常特殊的，除了適當地選擇了旁切圓以外，我們還要對圓的幾何性質有更多的了解。
能力指標中的另一項：
A-4-13：能熟練乘法公式。
這個證明也是練習三項和平方公式的好機會。