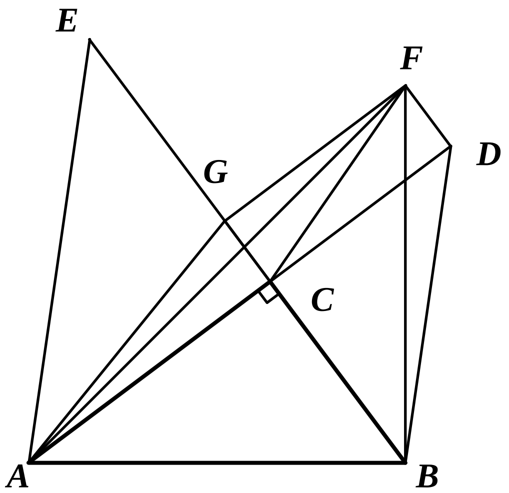
勾股定理證明-G243

【作輔助圖】

1. 直角三角形ΔABC，過C作$\overline{BC}$垂直線$\overline{CD}$，使$\overline{CD}=\overline{BC}$；並過$C$作$\overline{AC}$垂直線$\overline{CE}$，使$\overline{CE}=\overline{AC}$；同樣地過$B$作$\overline{AB}$垂直線$\overline{BF}$，使$\overline{BF}=\overline{AB}$。
2. 接著過F向$\overline{EC}$作垂足G，連$\overline{FG}$。
3. 最後連$\overline{FA}$、$\overline{FC}$、$\overline{GA}$、$\overline{AE}$、$\overline{BD}$。



【求證過程】

從直角三角形ABC開始以三邊向適當方向作三個等腰直角三角形，再利用一組全等三角形以及同底等高則三角形面積會相同的特性，將大等腰直角三角形的面積分割成兩個小等腰直角三角形的面積和，進而推出畢氏定理的關係式。

1. 首先不難看出ΔABC與ΔBFG全等，以下給出證明，並從中推得其邊長關係：
   因為
   $$\overline{AB}=\overline{BF},$$
   且
   $$\angle CAB=90^\circ-\angle CBA=\angle GBF,$$
   以及
   $$\angle ACB=90^\circ=\angle BGF,$$
   所以可推得
   $$\Delta FEC\cong\Delta ABC\ \text{(AAS 全等)},$$
   也因此可以得到
   $$\overline{CB}=\overline{GF}=\overline{CD}\text{且}\overline{BG}=\overline{AC}=\overline{EC}.$$
2. 因為同底等高的三角形面積相同，所以有
   $$\Delta FCB=\Delta DCB,$$
   且
   $$\Delta ACF=\Delta ACG.$$
3. 又因為同高且$\overline{BC}=\overline{GE}$，所以
   $$\Delta ABC=\Delta AGE.$$
4. 因此

$$\begin{aligned}\Delta ABF &= \Delta ABC + \Delta FCB + \Delta ACF \\ &= \Delta AGE + \Delta DCB + \Delta ACG \\ &= \Delta ACE + \Delta BCD,\end{aligned}$$

即 $\dfrac{\overline{AB}^2}{2} = \dfrac{\overline{AC}^2}{2} + \dfrac{\overline{BC}^2}{2}$ 可得畢氏定理

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自 Edwards' Geom., 1895, p. 158, fig.(20)。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 243 號
2. 心得：此證明作適當的輔助線，再透過同底等高面積相等的特性來證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●	●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。