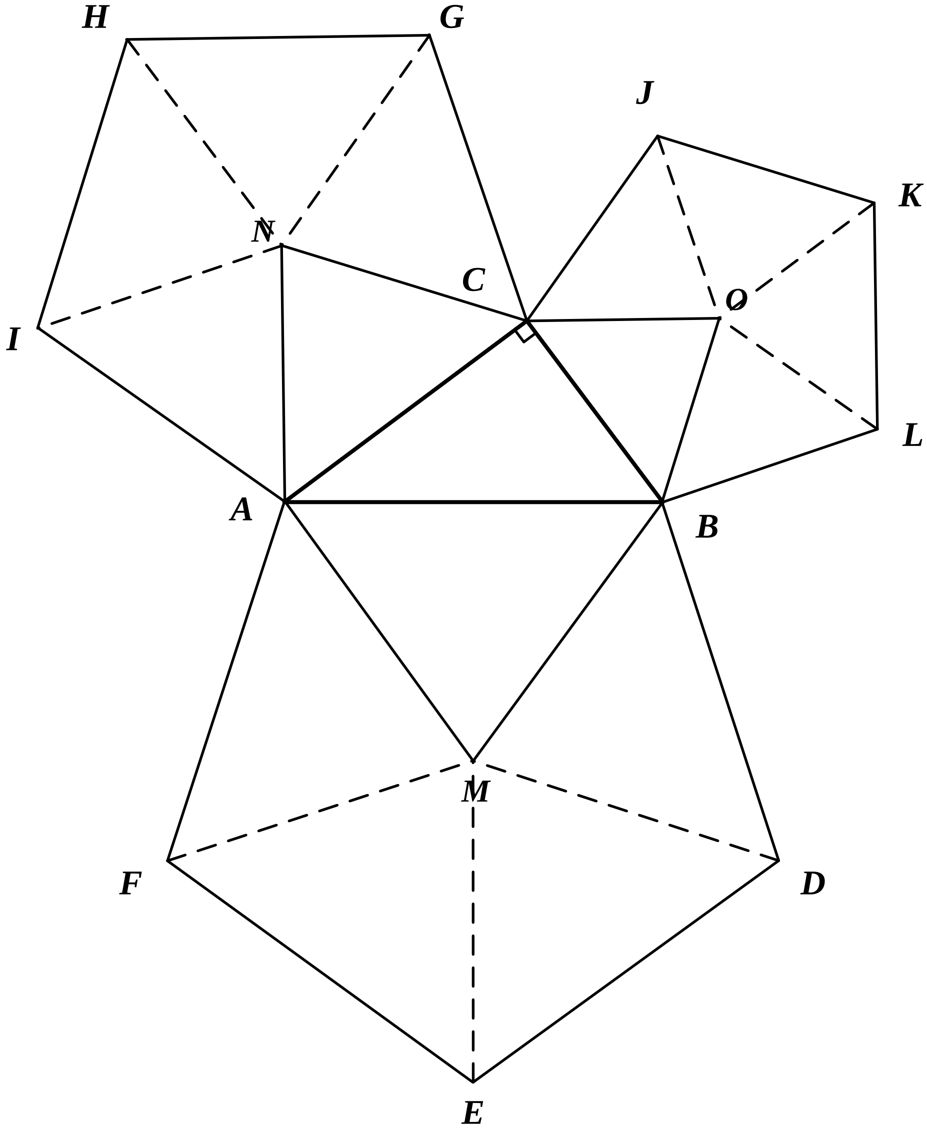
勾股定理證明-G242-2

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的三邊為正五邊形的一邊，分別向外作正五邊形 $ABDEF$ 、正五邊形 $ACGHI$ 及正五邊形 $BCJKL$ 。(如何作出正五邊形不在此處討論)
2. 而正五邊形的中心分別為 M,N,O 。(可以作任意兩邊的中垂線交點找任意正多邊形的中心)
3. 連 $\overline{AM},\overline{BM},\overline{AN},\overline{CN},\overline{CO}$ 以及 $\overline{BO}$ 。



【求證過程】

我們要證明二個較小的正五邊形的面積和為較大的正五邊形的面積，再透過相似形的面積比，就是對應邊長的平方比的性質，就可以證明畢氏定理。而我們的做法是以正五邊形的中心將每個正五邊形分成五個全等的等腰三角形，接著就只需要證明這二小一大的相似等腰三角形的面積關係即可。

1. 我們知道 $\Delta ABM,\Delta ACN,\Delta BCO$ 為相似的等腰三角形，因為正五邊形的每個內角皆為 108° ，而分割成五個全等的等腰三角形皆為 $54^\circ,54^\circ,72^\circ$ 的三內角，所以必為相

似的三角形。

2. 透過《勾股定理》中的 G241 我們已經證明了直角三角形三邊上的相似等腰三角形有面積的關係式， $\Delta ACN + \Delta BCO = \Delta ABM$ ，因此我們得到正五邊形也同樣符合面積關係式，因為

$$\begin{aligned}\text{正五邊形}ABDEF &= 5\Delta ABM \\ &= 5(\Delta ACN + \Delta BCO) \\ &= 5\Delta ACN + 5\Delta BCO \\ &= \text{正五邊形}ACGHI + \text{正五邊形}BCJKL.\end{aligned}$$

3. 又相似形的面積比即為邊長平方比，因此

$$k\cdot\overline{AB}^2 = k\cdot\overline{AC}^2 + k\cdot\overline{BC}^2,$$

也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明為 Loomis 於 1933 年所著，收錄在《勾股定理》一書幾何篇編號第 242 號。
2. 心得：此證明的重要意義在於他利用相似等腰的角形的面積關係式，推廣到所有直角三角形邊上的正多邊形，都可以用來證明畢氏定理，只要以中心切割成全等的三角形即可。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4. 補充：在數學能力指標裡有幾項：

S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

以及

C-S-03：能瞭解如何利用觀察、分類、歸納、演繹、類比等方式來解決問題

這個證明的最後讓我們得到一個想法，可以在直角三角形的邊上接上同邊數的正多邊形，只要這麼做，同樣地也就可以證明畢氏定理關係式。