勾股定理證明-G242-1

【作輔助圖】

1. 在直角三角形的三邊上作相似的五邊形 $ACDEF$ ，五邊形 $CBD'E'F'$ 及五邊形 $BAD''E''F''$ 。

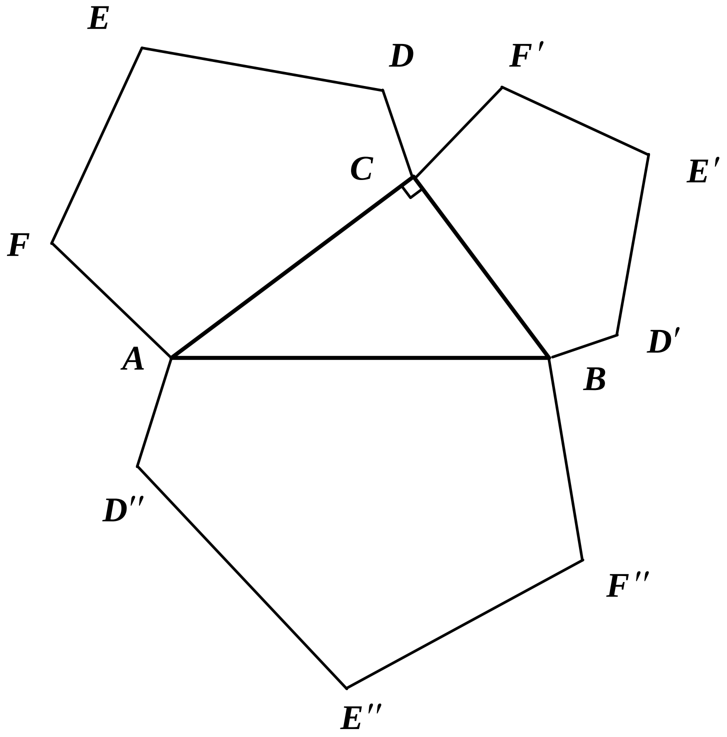

Fig. 1

接著我們以五邊形 $ACDEF$ 為示範作圖：

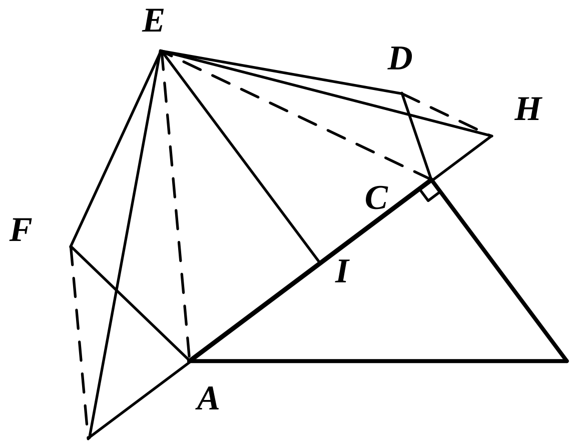

Fig. 2

2. 連 $\overline{EA},\overline{EC}$ ，並過 F 作平行於 $\overline{EA}$ 的直線，交 $\overline{AC}$ 延伸線於 G ；過 D 作平行於 $\overline{EC}$ 的直線，交 $\overline{AC}$ 延伸線於 H 。連 $\overline{EG},\overline{EH}$ 。
3. 過 E 作 $\overline{GH}$ 的垂直線，垂足 I 。

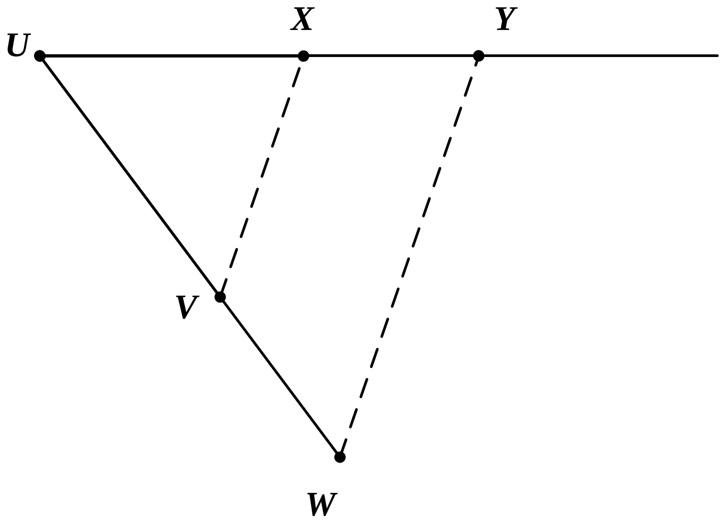

Fig. 3

4. 在平面上作一$\overline{UV}$與$\overline{AC}$等長，並在$\overline{UV}$延伸線上取一點W使得$\overline{UW}=\overline{GH}$ 。
5. 過U作與$U-V-W$ 不共線之一線，並在線上取一點X使得$\overline{UX}=\overline{EI}$。連$\overline{VX}$ 。
6. 過W作平行於$\overline{VX}$的直線，交$\overline{UX}$延伸線於Y。

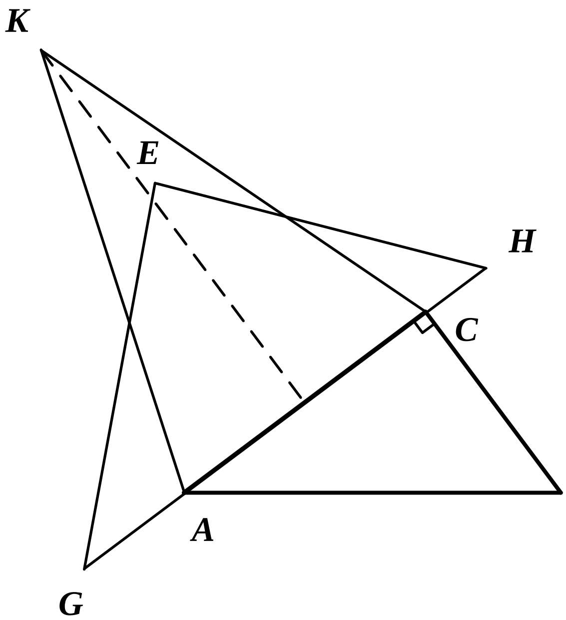

Fig. 4

7. 作$\overline{AC}$中垂線與$\overline{AC}$交於J，並在中垂線上取一點K使得$\overline{JK}=\overline{UY}$。接著連$\overline{KA},\overline{KC}$ 。

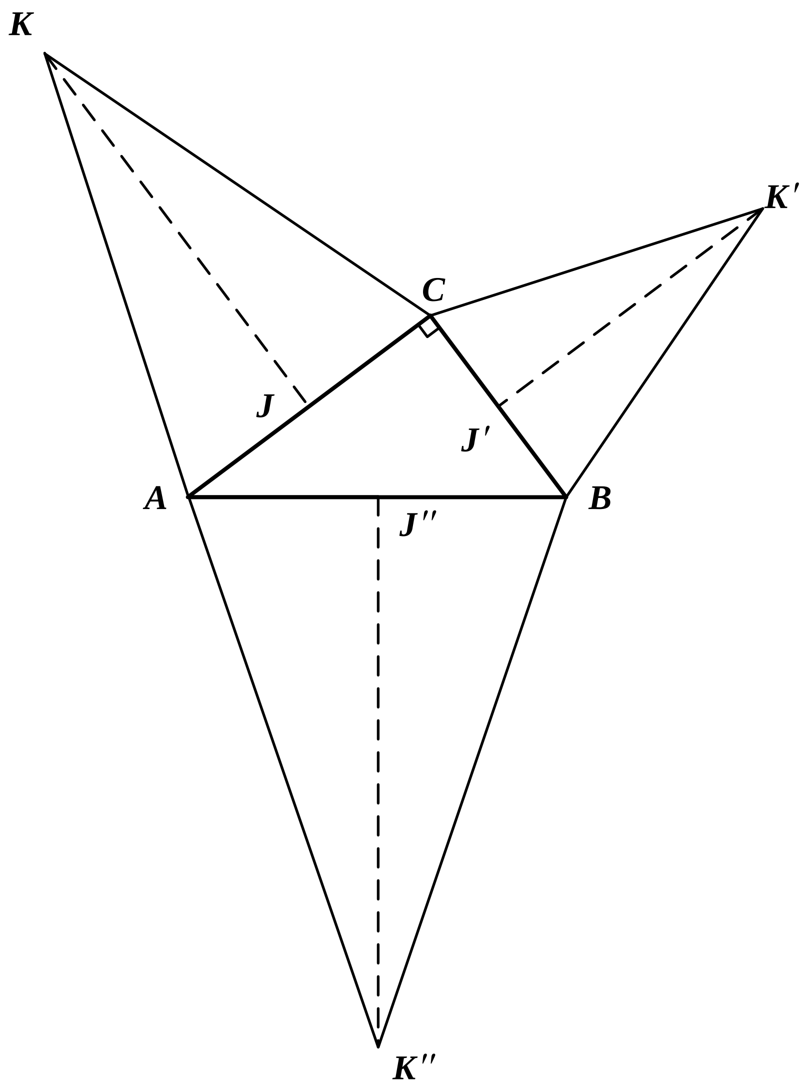

Fig. 5

8. 最後分別在 $\overline{BC}, \overline{AB}$ 如上述操作，可以得到 K', K'' ，並連接 $\overline{K'B}, \overline{K'C}, \overline{K''A}, \overline{K''B}$ 。

【求證過程】

以上面程序作輔助線，目的是在每邊上製造面積與邊上的五邊形相等的等腰三角形。其中利用到了推移的技巧，以及尺規作圖中乘法、伸縮的技巧。完成作圖後我們只要說明三邊上較小的兩個等腰的三角形的面積和，等於較大的等腰三角形的面積。而這個性質剛好我們在之前已經有了證明，也就完成了畢氏定理了證明。

1. 證明 Fig. 2 上的五邊形 $ACDEF$ 面積等於 ΔEGH 面積：

因為 $\overline{AE}$ 平行於 $\overline{FG}$ ，所以 ΔAEF 與 ΔAEG 是同底等高，

$$\Delta AEF = \Delta AEG,$$

而同理可以得到

$$\Delta CDH = \Delta CHE.$$

也因此

$$
\begin{aligned}
\text{五邊形}ACDEF &= \Delta AEF + \Delta ACE + \Delta CDE \\
&= \Delta AEG + \Delta ACE + \Delta CEH \\
&= \Delta EGH.
\end{aligned}
$$

2. 在 Fig. 3 上用這樣的方式作出 $\Delta UVX \sim \Delta UWY$, 所以

$$\frac{\overline{UX}}{\overline{UY}} = \frac{\overline{UV}}{\overline{UW}},$$

因此可以推得

$$\overline{UX} \cdot \overline{UW} = \overline{UV} \cdot \overline{UY}.$$

3. 證明在 Fig. 4 上的 ΔACK 面積等於 ΔEGH 面積：

$$
\begin{aligned}
\Delta EHG &= \frac{1}{2} \cdot \overline{GH} \cdot \overline{EI} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \overline{UW} \cdot \overline{UX} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \overline{UV} \cdot \overline{UY} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{JK} \\
&= \Delta ACK.
\end{aligned}
$$

4. 綜合以上可以得到 $\text{五邊形}ACDEF = \Delta ACK$ ，再以同樣的道理可以證明 $CBD'E'F' = \Delta BCK'$ 以及 $BAD''E''F'' = \Delta BAK''$.

5. 而 $\Delta ACK, \Delta BCK', \Delta BAK''$ 為三邊上相似的等腰三角形，根據《勾股定理》幾何篇編號第 241 號中的過程，即可得到 $\Delta ACK + \Delta BCK' = \Delta BAK''$, 也就是

$$ACDEF + BCD'E'F' = BAD''E''F'',$$

又由於他們是相似的五邊形，我們就可以得到畢氏定理關係式

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明為 Loomis 於 1933 年所著，收錄在《勾股定理》一書幾何篇編號第 242 號。
2. 心得：這個證明用到了不少作圖的技巧，問題等同是如何在一個固定底邊上製造面積等於任意五邊形的等腰三角形。而為了達到這樣的目的，使用到了平行線推移以及平行線伸縮的技巧。最後再引述已知的過程，即可證明畢氏定理關係式。但實際教學上，若我們以此方法來證明畢氏定理，目的會是在作圖技巧而非畢氏定理本身。因為若想要證明直角三角形邊上的相似圖形小面積和會等於大面積，我們會使用「已知」的畢氏定理搭配面積比例特性來證明。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標裡，有這麼一項：
   S-4-10：能根據直尺、圓規操作過程的敘述，完成尺規作圖。
   在這個證明當中我們可以學習到尺規作圖的技術：
   「給定一多邊形，能利用尺規作圖製造面積相等的三角形。」
   而另一項能力指標：
   C-S-01 ：能分解複雜的問題為一系列的子題。
   在這個證明中我們也看到很好的示範，前段的作圖部分，先製造指定面積的三角形，再製造指定底並且同面積的三角形，再利用前面已經完成的預備定理，即可完成整個證明。這樣的模式在高等數學教科書中經常出現。