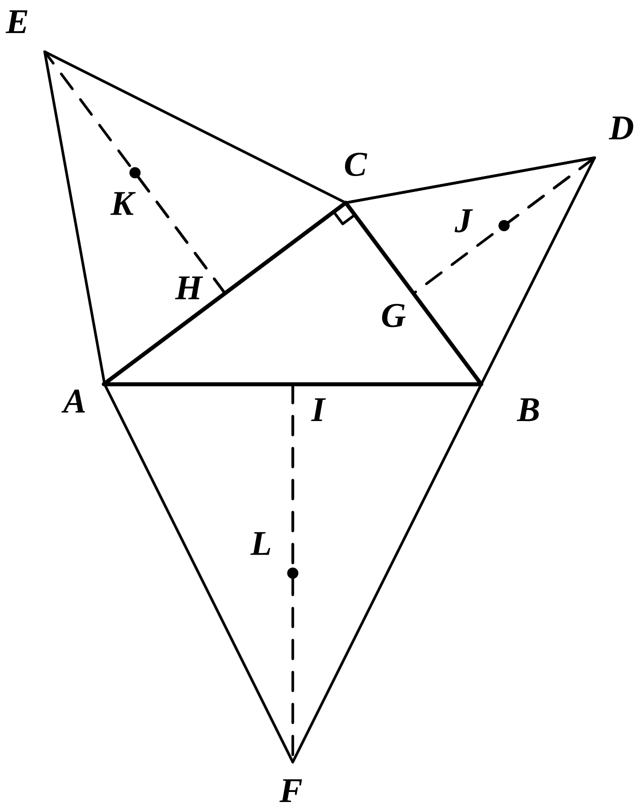
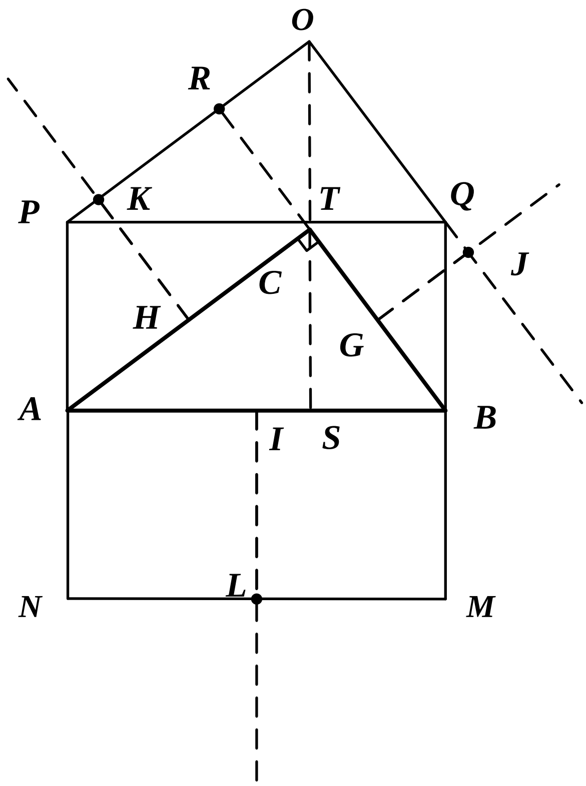
勾股定理證明-G241

【作輔助圖】

1. 在直角三角形 ABC 的三邊上分別以三邊為底邊作相似的等腰三角形 $\Delta BCD, \Delta ACE, \Delta ABF$ 。
2. 作三等腰三角形的高，分別為 $\overline{DG}, \overline{EH}, \overline{FI}$ 。
3. 在三個高上分別取中點 J, K, L 。



4. 以 $\overline{AB}$ 邊為長方形的一邊， L 為對邊上的一點，作▭$ABML$ 。
5. 接著過 J, K 分別作平行於 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ 的平行線，交於 O ，並連 $\overline{OC}$ 並延伸交 $\overline{AB}$ 於 S ，交 $\overline{PQ}$ 於 T 。
6. 最後分別過 A, B 作 $\overline{OC}$ 的平行線，交過 K, J 平行於 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 的平行線於 P, Q ，連 $\overline{PQ}$ 。其中四邊形 $ACOP$ 及 $BCOQ$ 為平行四邊形。及過 C 作 $\overline{OP}$ 的垂直線，垂足 R 。



【求證過程】

先證明作圖的方式製造出來的三邊上的長方形及平行四邊形，分別與三邊上的相似等腰三角形的面積相等。因此我們要證明的目標就可以轉變為兩個平行四邊形面積和等於長方形面積。接著透過平行四邊形的特性以及相似三角形的邊長成比例，我們就可以證明它們的面積關係式。最後因為我們知道相似三角形的面積比就是邊長平方比，也就證明了畢氏定理。

1. 證明三角形面積與對應的四邊形面積相等：

   我們有

$$\Delta BCD=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{GD}=\overline{BC}\times(\frac{1}{2}\overline{GD})=\overline{BC}\times\overline{GJ}=\square BCOQ,$$

   還有

$$\Delta ACE=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{HE}=\overline{AC}\times(\frac{1}{2}\overline{HE})=\overline{AC}\times\overline{HP}=\square ACOP,$$

   以及

$$\Delta ABF=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{IF}=\overline{AB}\times(\frac{1}{2}\overline{IF})=\overline{AB}\times\overline{IL}=\square ABMN.$$

2. 接著我們證明 $\Delta PQO,\Delta ABC$ 為全等的直角三角形：

   因為

$$\overline{AC}=\overline{PO}(\because\square ACOP),$$

   並且

$$\overline{BC}=\overline{QO}(\because\square BCOQ),$$

   以及

$$\angle POQ = \angle POC + \angle QOC$$
$$=(180^\circ - \angle ACO)+(180^\circ - \angle BCO)\ (\because \square ACOP, \square BCOQ)$$
$$=360^\circ - \angle ACO - \angle BCO$$
$$=\angle ACB,$$

所以
$$\Delta ABC \cong \Delta PQO\,(\text{SAS 全等}).$$

3. 證明$\Delta COR, \Delta ABC$為相似三角形：

因為
$$\angle CRO = 90^\circ = \angle ACB,$$

並且
$$\frac{\overline{CR}}{\overline{OR}} = \frac{\overline{HK}}{\overline{GJ}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{HE}}{\frac{1}{2}\overline{GD}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}\,(\because \Delta BCD \sim \Delta ACE),$$

所以我們有
$$\Delta COR \sim \Delta ABC\,(\text{SAS 相似}).$$

4. 證明$\overline{OC}$與$\overline{IL}$等長：

因為
$$\frac{\overline{OC}}{\overline{RC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\,(\because \Delta ABC \sim \Delta COR),$$

並且
$$\frac{\overline{KH}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2}\frac{\overline{EH}}{\overline{AC}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\overline{FI}}{\overline{AB}}\,(\because \Delta ACE \sim \Delta ABF)$$
$$= \frac{\overline{IL}}{\overline{AB}},$$

所以我們可以推得
$$\overline{OC} = \frac{\overline{RC}}{\overline{AC}}\cdot\overline{AB} = \frac{\overline{KH}}{\overline{AC}}\cdot\overline{AB} = \frac{\overline{IL}}{\overline{AB}}\cdot\overline{AB} = \overline{IL}.$$

5. 證明平行四邊形四邊形$ABQP$為長方形：

因為
$$\angle PAB = \angle PAC + \angle CAB$$
$$=\angle COR + \angle OCR\ (\because \square ACOP\text{對角相等以及}\Delta ABC \sim \Delta COR)$$
$$=90^\circ,$$

又四邊形$ABQP$為平行四邊形, 所以它為長方形.

6. 最後讓我們來證明面積關係式：

$$
\begin{aligned}
\Delta ACE+\Delta BCD &= \square PACO+\square QBCO \\
&= \square PAST+\square QBST\ (\because \text{同底等高}) \\
&= \square PABQ \\
&= \overline{PA}\times\overline{PQ} \\
&= \overline{CO}\times\overline{AB}\ (\because \square PACO \text{以及} \Delta ABC\cong\Delta PQO) \\
&= \overline{IL}\times\overline{AB} \\
&= \square ABMN \\
&= \Delta ABF.
\end{aligned}
$$

又因為相似形的面積比就是邊長平方比,

$$k\cdot\overline{BC}^2+k\cdot\overline{AC}^2=k\cdot\overline{AB}^2,$$

也就可以得到畢氏定理關係式,

$$\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\overline{AB}^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明源自於 Loomis，他在《勾股定理》一書中提到他在 1933 年十月寫下這個證明，在那之前他不曾聽過看過以直角三角形三邊上任意高的相似等腰三角形來證明畢氏定理。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 241 號
2. 心得：這個證明在《勾股定理》幾何篇中特別具有意義，我們可以把一些看似困難的直角三角形邊上相似形面積證明題，先利用等面積作圖變成邊上的相似等腰三角形，再引述這個證明的過程，即可以證明畢氏定理。例如接下來的篇號 242，他原先的問題是邊上的相似五邊形或是正五邊形，都可以變換成這個問題。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。