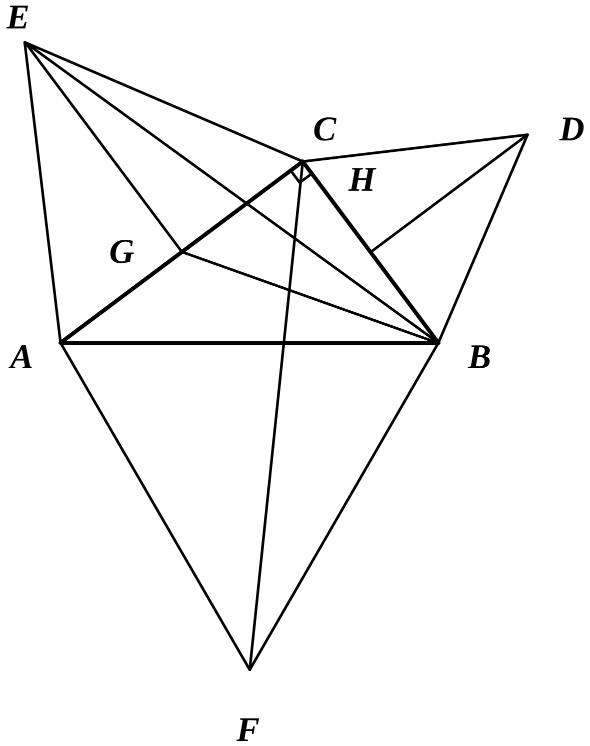
勾股定理證明-G239

【作輔助圖】

1. 分別直角三角形ABC的$\overline{AB}$、$\overline{BC}$及$\overline{AC}$為邊向外作正三角形BCD、正三角形ACE 及正三角形ABF。
2. 過E作$\overline{AC}$垂直線交$\overline{AC}$於G，過D作$\overline{BC}$垂直線交$\overline{BC}$於H。
3. 連$\overline{BE}$交於I、連$\overline{AD}$與$\overline{BC}$交於J。
4. 連$\overline{BG}$、$\overline{AH}$、$\overline{CF}$。



【求證過程】

先證明其中兩組三角形面積相等，也不難發現其中有兩組全等的三角形。再透過面積分割就可以得到大正三角形的面積會等於兩個小正三角形的面積和，推導出畢氏定理的關係式。

1. 先證明ΔCIE與ΔBIG面積相等，再同理可得$\Delta CDJ=\Delta AHJ$：
   因為$\overline{BC}$平行於$\overline{GE}$(內錯角相等)，所以$\Delta EGC=\Delta EGB$(同底等高),
   因此
   $$\Delta CIE=\Delta EGC-\Delta EIG=\Delta EGB-\Delta EIG=\Delta BIG,$$
   同理，因為$\overline{CA}$平行於$\overline{DH}$，所以
   $$\Delta CDJ=\Delta AHJ.$$
2. 不難發現ΔCAF與ΔEAB全等，同理可證ΔCBF與ΔDBA全等，以下我們給出證明：
   因為
   $$\overline{CA}=\overline{EA}(\text{正三角形邊長}),$$
   且
   $$\overline{BA}=\overline{FA}(\text{正三角形邊長}),$$

又

$$\begin{aligned}\angle CAF &= \angle CAB + 60^\circ \\ &= \angle EAB,\end{aligned}$$

因此

$$\Delta CAF \cong \Delta EAB \,(\text{SAS 全等}).$$

同理可證

$$\Delta CBF \cong \Delta DBA.$$

3. 接著就可以推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\Delta ABF &= \Delta ACF + \Delta BCF - \Delta ABC \\ &= \Delta EAB + \Delta DAB - \Delta ABC \\ &= \left(\Delta EAI + \Delta ABG + \Delta BIG\right) + \left(\Delta BDJ + \Delta ABH + \Delta HAJ\right) - \Delta ABC \\ &= \left(\Delta EAI + \frac{1}{2}\Delta ABC + \Delta EIC\right) + \left(\Delta BDJ + \frac{1}{2}\Delta ABC + \Delta CJD\right) - \Delta ABC \\ &= \left(\Delta EAI + \Delta EIC\right) + \left(\Delta DBJ + \Delta DJC\right) \\ &= \Delta ACE + \Delta BCD,\end{aligned}$$

再透過相似形面積比為邊長平方比關係得

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2.$$

此即為畢氏定理關係式。

【註與心得】

1. 來源：此證明是作者 Loomis 在 1900 年寫下的，使用了非正方形的其它多邊形。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 239 號
2. 心得：這個證明用到了比較不易觀察到的特性，梯形的對角線兩側的三角形面積會均等。以及用了旋轉的想法來觀察三角形的全等。另外在同理可證的部分也可以供給學生當作練習。我想這些都是教學上很棒的材料。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。