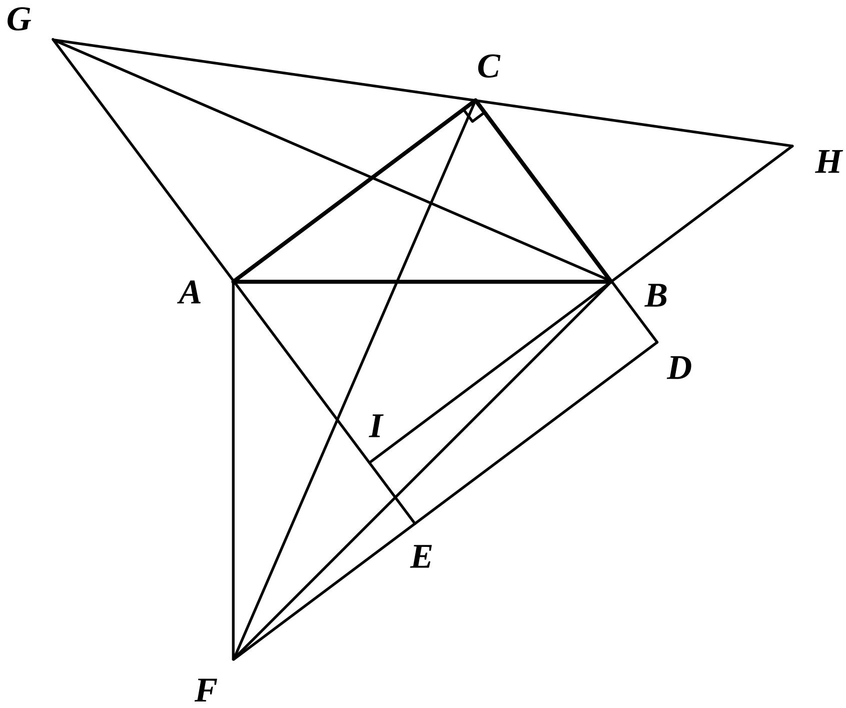
勾股定理證明-G238

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 邊為正方形的一邊，向內作正方形 $ACDE$。
2. 過 A 向外作 $\overline{AB}$ 的垂直線，並在垂直線上取一點 F，使 $\overline{AF}$ 與 $\overline{AB}$ 等長。同樣地過 A 向外作 $\overline{AC}$ 的垂直線，並在垂直線上取一點 G，使 $\overline{AG}$ 與 $\overline{AC}$ 等長。再過 B 向外作 $\overline{BC}$ 的垂直線，並在垂直線上取一點 H，使 $\overline{BH}$ 與 $\overline{BC}$ 等長。接著連起 $\overline{BF}$、$\overline{CG}$ 以及 $\overline{CH}$。可以得到三個等腰直角三角形 $\Delta ABF, \Delta ACG, \Delta BCH$。
3. 過 B 作 $\overline{AC}$ 的平行線，交 $\overline{AE}$ 於 I。最後連 $\overline{EF}$。



【求證過程】

輔助線圖中原直角三角形及大的等腰直角三角形組合的四邊形重新切成兩個三角形，也可以看到原直角三角形及兩個小等腰直角三角形組合的四邊形重新切成兩個三角形。而我們可以利用全等及同底等高證明這分別的兩塊三角形的面積是對應相等的。最後我們透過等量原理推導面積等式，就可以得證大等腰直角三角形的面積，等於兩個小等腰直角三角形的面積和，也就完成了這個畢氏定理的證明。

1. 不難看出 $\Delta ABC, \Delta AFE$ 為全等的三角形，以下我們給出證明：

   其中因為
   $$\overline{AB} = \overline{AF},$$
   並且
   $$\overline{AC} = \overline{AE} (\because \text{正方形的邊}),$$
   以及
   $$\angle CAB = 90^\circ - \angle BAE = \angle FAE,$$
   所以

$$\Delta ABC \cong \Delta AFE \text{ (SAS 全等)}.$$

1. 接著以同底等高方式證明ΔBCF面積=ΔHBG面積 ：

   考慮ΔBCF 以$\overline{BC}$ 為底，高為$\overline{DF}$ ；ΔHBG 以$\overline{BH}$ 為底，高為$\overline{GI}$ 。

   其中

$$\overline{BC} = \overline{BH}$$

   並且

$$\begin{aligned}\overline{DF} &= \overline{DE} + \overline{EF} \\ &= \overline{AC} + \overline{BC} (\because \text{正方形的邊以及} \Delta ABC \cong \Delta AFE) \\ &= \overline{GA} + \overline{AI} (\because \text{等腰直角三角形的邊以及長方形的邊}) \\ &= \overline{GI},\end{aligned}$$

   所以有ΔBCF 與ΔHBG 同底等高，因此它們的面積相同。

2. 最後我們推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\Delta ABF + \Delta ABC &= \text{四邊形} ACBF \\ &= \Delta CAF + \Delta CFB \\ &= \Delta BAG + \Delta BGH \\ &= \text{四邊形} ABHG \\ &= \Delta CGA + \Delta CHB + \Delta ABC.\end{aligned}$$

3. 從上式可以得到$\Delta ABF = \Delta CGA + \Delta CHB$也就是說$2\Delta ABF = 2\Delta CGA + 2\Delta CHB$,

   此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自 1821 年的 Hoffmann 所寫下，在 1880 年的書《*Jury Wipper*》中被找到。Loomis 將這個證明記載於《勾股定理》中的幾何篇編號第 238 號。
2. 心得：這個證明使用到的為等腰直角三角形，有別於一般常見的正方形面積的證明。利用到四邊形的兩種分割法，證明出大的等腰直角三角形面積可以表示成另外兩個小的直角三角形面積。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。