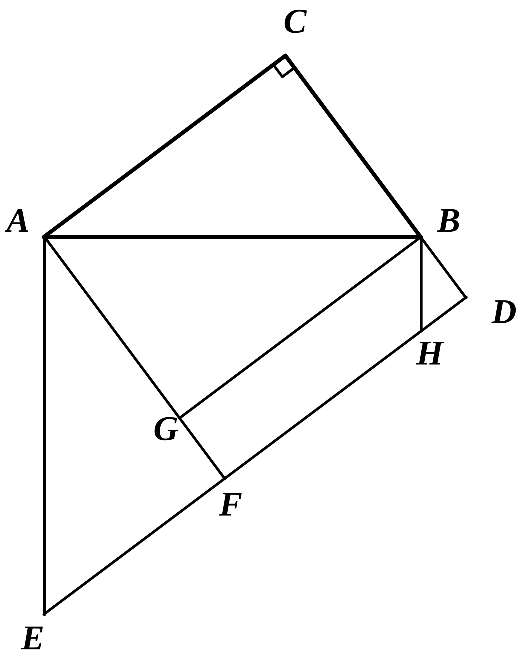
勾股定理證明-G237

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 為邊，向內作正方形 $ACDF$ 。
2. 接著在 $\overline{DF}$ 延伸線上取一點 E 使 $\overline{FE}=\overline{CB}$ ，並連 $\overline{AE}$ 。
3. 然後過 B 作 $\overline{AB}$ 的垂直線，交 $\overline{DE}$ 於 H 。以及過 B 作 $\overline{AF}$ 的垂線，交 $\overline{AF}$ 於 G 。



【求證過程】

在適當地作輔助線後，我們會在直角三角形 ΔABC 的下方製造出四邊形。接著透過這個四邊形的兩個拆解方式，加上相似三角形的邊長成比例的特性，以代數表示面積等式，再運算推導方程式，就可以得到畢氏定理關係式。

1. 不難發現 ΔABC 及 ΔAEF 為全等三角形，以下我們給出證明：

   因為
   $$\overline{AC}=\overline{AF}(\because \text{正方形}ACDF\text{的兩邊}),$$
   並且
   $$\overline{EF}=\overline{BC},$$
   以及
   $$\angle AFE=90^\circ=\angle ACB,$$
   所以可以得到
   $$\Delta ABC\cong\Delta AEF\ (\text{SAS 全等}).$$

2. 接著我們看出 ΔABC 以及 ΔBDH 為相似三角形，以下給個證明：

   因為
   $$\angle CBA=90^\circ-\angle DBH=\angle DHB,$$
   並且
   $$\angle ACB=90^\circ=\angle BDH,$$

所以可以得到

$$\Delta ABC \cong \Delta BDH \text{ (AA 相似)}.$$

3. 我們依相似形性質將 ΔBDH 的三邊以 ΔABC 的三邊 $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$ 表示：
其中

$$\overline{BD}=\overline{CD}-\overline{CB}=b-a.$$

另一方面因為

$$\Delta BDH \sim \Delta ABC,$$

所以

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}},$$

可以推得

$$\overline{DH}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\cdot\overline{BD}=\frac{a}{b}(b-a)=a(1-a/b).$$

同理

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}},$$

可以推得

$$\overline{BH}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\overline{BD}=\frac{c}{b}(b-a)=c(1-a/b).$$

4. 然後就可以將同一個四邊形以兩種不同的方式拆解，並考慮其面積：
因為

$$\Delta AEF + AFDB = ABDE = AEHB + \Delta BHD,$$

並以 a,b,c 表示成

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b\left[b+\left(b-a\right)\right]=\frac{1}{2}c\left[c+c(1-a/b)\right]+\frac{1}{2}a(b-a)(1-a/b),$$

展開可以得到

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{ac^2}{2b}+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{a^3}{2b},$$

並可以化簡成

$$b^2=c^2-a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{ac^2}{2b}+\frac{a^3}{2b}\Rightarrow(a^2+b^2-c^2)(1-\frac{a}{2b})=0,$$

其中因為 $b>a$ 所以 $a/2b \neq 1$，所以 $a^2+b^2-c^2=0$,
也就是畢氏定理關係式

$$a^2+b^2=c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是作者 Loomis 在 1900 年的八月所給出，參考了 J. G. Thompson 的證明。收錄在《勾股定理》的幾何篇中編號第 237 號。
2. 心得：這個證明用到的數學知識雖然並非困難，但是代數化簡的計算過程複雜。特別是其中不直接簡單地得到畢氏定理關係式，而是從因式分解中整理出來，在教學上不建議，比較像是拼湊出來的結果。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●			

4. 補充：數學能力指標中，有幾項是這樣：

   S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的相似再透過等量公理來推理出畢氏定理關係式。