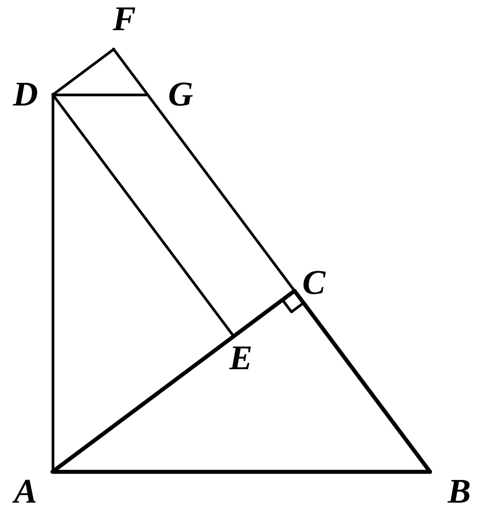
勾股定理證明-G236

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC 中，過 A 作 $\overline{AB}$ 的垂直線 $\overline{AD}$ 並與 $\overline{AB}$ 等長。
2. 接著過 D 作 $\overline{AC}$ 的垂足 E 。
3. 延伸 $\overline{BC}$ 至 F 使 $\overline{CF}$ 與 $\overline{DE}$ 等長，並連 $\overline{DF}$ 。
4. 最後過 D 作 $\overline{AB}$ 的平行線，交 $\overline{CF}$ 於 G 。



【求證過程】

先作輔助線作出四邊形 $ABFD$ 及其分割。在證明一組全等三角形及一組相似三角形後，透過相似三角形邊長成比例的性質，將小三角形的三邊都以代數 a,b,c 表示。最後由兩種方式的面積拆解得到的等式，可以整理推導出畢氏定理關係式。

1. 不難發現 ΔABC 及 ΔDAE 為全等的直角三角形，以下我們給出證明：
   其中因為
   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle DEA,$$
   並且
   $$\overline{AB} = \overline{AD},$$
   以及
   $$\angle CBA = 90^\circ - \angle CAB = \angle EAD,$$
   所以可以得到
   $$\Delta ABC \cong \Delta DAE \text{ (AAS 全等)}.$$
2. 也可以看出 ΔABC 及 ΔDGF 相似，以下也給個證明：
   因為 $\angle DFG = 90^\circ = \angle ACB, \angle FGD = \angle CBA$(同側內角), 所以可以得到
   $\Delta ABC \sim \Delta DGF$ (AA 相似).
3. 將 ΔDGF 的三邊長皆以直角三角形 ΔABC 的三邊 a,b,c 表示：
   其中
   $$\overline{DF} = \overline{CE} = b - a,$$
   另外由 $\Delta ABC \sim \Delta DGF$ 可以得知

$$\overline{DG}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\overline{DF}=\frac{c}{b}(b-a)=c(1-a/b),$$

以及

$$\overline{GF}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\cdot\overline{DF}=\frac{a}{b}(b-a)=a(1-a/b).$$

4. 由兩種拆解方式得到的面積等式開始推導：
因為

$$\Delta ABC+ACFD=ABFD=\Delta DGF+DGBA,$$

所以可以得到面積關係式

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b\left[b+\left(b-a\right)\right]=\frac{1}{2}a(1-\frac{a}{b})(b-a)+\frac{1}{2}c\left[c(1-\frac{a}{b})+c\right]$$

展開得到

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2+\frac{a^3}{2b}+\frac{1}{2}c^2-\frac{ac^2}{2b}+\frac{1}{2}c^2,$$

整理出

$$b^2=c^2-a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{a^3}{2b}-\frac{ac^2}{2b},$$

$$a^2+b^2-c^2-\frac{a}{2b}(a^2+b^2-c^2)=0,$$

也就是

$$\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(1-\frac{a}{2b}\right)=0,$$

其中已知 $a\neq 2b$, 因此 $a^2+b^2-c^2=0.$
此即為畢氏定理關係式

$$a^2+b^2=c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是來自 J. G. Thompson 在 1888 年的證明。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中的幾何篇中編號第 236 號。
2. 心得：這個證明用到的數學知識雖然並非困難，但是代數化簡的計算過程複雜。特別是其中不直接簡單地得到畢氏定理關係式，而是從因式分解中整理出來，在教學上不建議，比較像是拼湊出來的結果。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●			

4. 補充：數學能力指標中，有幾項是這樣：

S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。
以及
N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的相似再透過等量公理來推理出畢氏定理關係式。