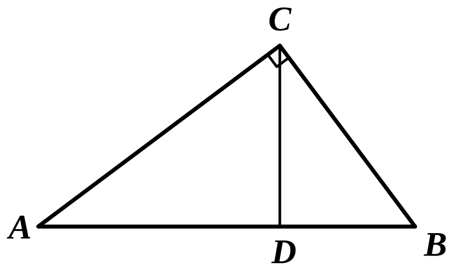
勾股定理證明-G230

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC 中，過 C 作 $\overline{AB}$ 垂直線交 $\overline{AB}$ 於 D 。



【求證過程】

先證明三角形 ABC 、三角形 ACD 、三角形 CBD 彼此相似，再利用相似形面積比例特性即可推得畢氏定理關係式。

1. 子母相似性質可以看出這些直角三角形為相似的三角形，以下我們給個證明：
   因為
   $$\angle C = \angle CDA = \angle CDB = 90^{\circ},$$
   且
   $$\angle A = \angle A \text{ 且 } \angle B = \angle B,$$
   所以
   $$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD \text{ (AA 相似)}.$$
2. 接著要利用相似形面積等於對應邊形的平方比：
   因為
   $$\Delta ABC : \Delta ACD : \Delta CBD = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2,$$
   所以可以令 $\Delta ABC = \overline{AB}^2 \cdot k$ ， $\Delta ACD = \overline{AC}^2 \cdot k$ ， $\Delta CBD = \overline{BC}^2 \cdot k$ ，其中 $k \neq 0$
3. 再利用面積分割得到的等式推導：
   $$\Delta ABC = \Delta ACD + \Delta BCD$$
   $$\Rightarrow \overline{AB}^2 \cdot k = \overline{AC}^2 \cdot k + \overline{BC}^2 \cdot k$$
   $$\Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,$$
   此即為畢氏定理關係式。

【註與心得】

1. 來源：此證明來自當時 19 歲的年輕人 Stanley Jashemski, 1934。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 230 號
2. 心得：這個證明最棒的地方是從頭到尾只作了一條輔助線。而再利用中學就可以知道的相似形面積比例性質，就可以證明完畢。對於不喜歡作輔助線，較喜歡輕巧的證明手法的學生，是個很適合的學習內容。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標裡，有這麼幾項：

S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

C-E-02：能由解題的結果重新審視情境，提出新的觀點或問題。

在這個證明裡特別地利用到了相似形的面積比例性質，並在學習上連結了子母相似性質以及勾股定理。