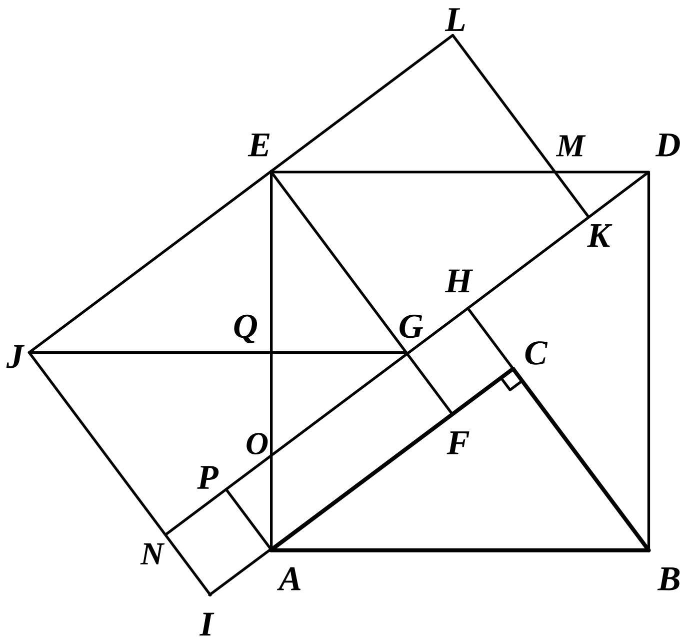
勾股定理證明-G226

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 邊為正方形的一邊，向內作正方形 $ABDE$ 。
2. 接著過 E 作 $\overline{AC}$ 的垂直線，垂足 F 。以及過 D 作 $\overline{EF}$ 的垂直線，垂足 G 。並延伸 $\overline{BC}$ 交 $\overline{DG}$ 於 H 。
3. 然後以 $\overline{EF}$ 為正方形的一邊，向左作正方形 $EFIJ$ 。再以 $\overline{EG}$ 為正方形的一邊，向右作正方形 $EGKL$ 。其中 $\overline{LK}$ 交 $\overline{DE}$ 於 M 。
4. 再來將 $\overline{DG}$ 延伸，交 $\overline{IJ}$ 於 N ，並交 $\overline{EA}$ 於 O 。以及過 A 作 $\overline{GN}$ 的垂直線，垂足 P 。最後連 $\overline{JG}$ 與 $\overline{AE}$ 交於 Q 。



【求證過程】

先作輔助圖，得到分別以直角三角形三邊為邊的三個正方形，並且將它們適當地切割。其中對應的區塊為全等圖形，也就是可以透過拼圖的方式將兩個小正方形切成的拼片，用來拼出大正方形。最後由面積關係即可推出畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta BDH, \Delta GJN, \Delta JGE, \Delta EAF, \Delta DEG$ 這六個直角三角形全為全等的直角三角形，以下我們給出證明：

   其中考慮 $\Delta ABC, \Delta BDH$ ，因為

   $$\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle HBD,$$

   並且

   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle BHD,$$

   以及

   $$\overline{AB} = \overline{BD}(\text{正方形的邊}),$$

   所以可以得到

   $$\Delta ABC \cong \Delta BDH \text{ (AAS 全等)}.$$

   另外 $\Delta ABC, \Delta EAF$ 為全等的三角形是因為

$$\overline{AB}=\overline{AE}(\text{正方形的邊}),$$

並且

$$\angle ACB=90^\circ=\angle EFA,$$

以及

$$\angle CBA=90^\circ-\angle CAB=\angle EAF,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta EAF\ (\text{AAS 全等}).$$

接著看$\Delta ABC,\Delta DEG$的全等，是因為

$$\overline{AB}=\overline{DE}(\text{正方形的邊}),$$

並且

$$\angle ACB=90^\circ=\angle DGE,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA&=90^\circ-\angle CAB\\&=90^\circ-\angle FEA(\because \Delta ABC\cong\Delta EAF)\\&=\angle EAF,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta DEG\ (\text{AAS 全等}).$$

還有$\Delta ABC,\Delta JGE$則是因為

$$\begin{aligned}\overline{AC}&=\overline{EF}(\because \Delta ABC\cong\Delta EAF)\\&=\overline{EJ}(\text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

並且

$$\overline{BC}=\overline{EG}(\because \Delta ABC\cong\Delta DEG),$$

以及

$$\angle ACB=90^\circ=\angle JEG,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta JGE\ (\text{SAS 全等}).$$

最後一組$\Delta JGE,\Delta GJN$是因為在長方形$EGNJ$中

$$\overline{JG}=\overline{GJ},$$

並且

$$\overline{JN}=\overline{EG}\ (\text{長方形的對邊}),$$

以及

$$\overline{GN}=\overline{EJ}\ (\text{長方形的對邊}),$$

所以

$$\Delta JGE\cong\Delta GJN\ (\text{SSS 全等}).$$

2. 接著也可以看出$\Delta EOG,\Delta EML$為全等三角形，以下是證明：
因為有

$$\overline{EG}=\overline{EL}(\text{正方形的邊}),$$

並且

$$\angle EGO = 90^\circ = \angle ELM,$$

以及

$$\angle GEO = 90^\circ - \angle DEG = \angle LEM,$$

所以可以得到

$$\Delta EOG \cong \Delta EML \text{(ASA 全等)}.$$

3. 而$\Delta AOP, \Delta DMK$ 亦為全等三角形，同樣地給出證明：

因為

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \overline{EA} - \overline{EO} \\ &= \overline{ED} - \overline{EM} (\because \text{正方形的邊以及} \Delta EOG \cong \Delta EML) \\ &= \overline{MD},\end{aligned}$$

並且有

$$\angle APO = 90^\circ = \angle DKM,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle POA &= \angle GOE (\text{對頂角}) \\ &= \angle LME (\because \Delta EOG \cong \Delta EML) \\ &= \angle DMK (\text{對頂角}),\end{aligned}$$

所以

$$\Delta AOP \cong \Delta DMK \ \text{(AAS 全等)}.$$

4. 明顯地正方形 $APNI$ 與正方形 $CFGH$ 全等：

是因為$\overline{GF} = \overline{PA}$(長方形的對邊), 所以正方形是全等的.

5. 然後我們考慮大正方形面積的拆解：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC + \Delta BDH + \Delta DMK + EGKM + \Delta EOG + AFGO + \square CFGH \\ &= \Delta GJN + \Delta JGE + \Delta AOP + EGKM + \Delta EML + AFGO + \square AINP \\ &= (\Delta GJN + \Delta JGE + \Delta AOP + AFGO + \square AINP) + (\Delta EML + EGKM) \\ &= \square EFIJ + \square EGKL.\end{aligned}$$

以上面積關係式，也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自 1918 年的 R. A. Bell, 他還提供了另外三種類似的證明方式。它收錄在 Loomis 的《勾股定理》的幾何篇中編號第 226 號。
2. 心得：此證明是屬拼圖式的證明方式，每一個拼片不只是面積相同，還是對應地全等。所以在理解上相當容易，學生願意嚐試應該也可以以類似的拆解方法來證明畢氏定理。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●		●	

4. 補充：

(1) 在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：