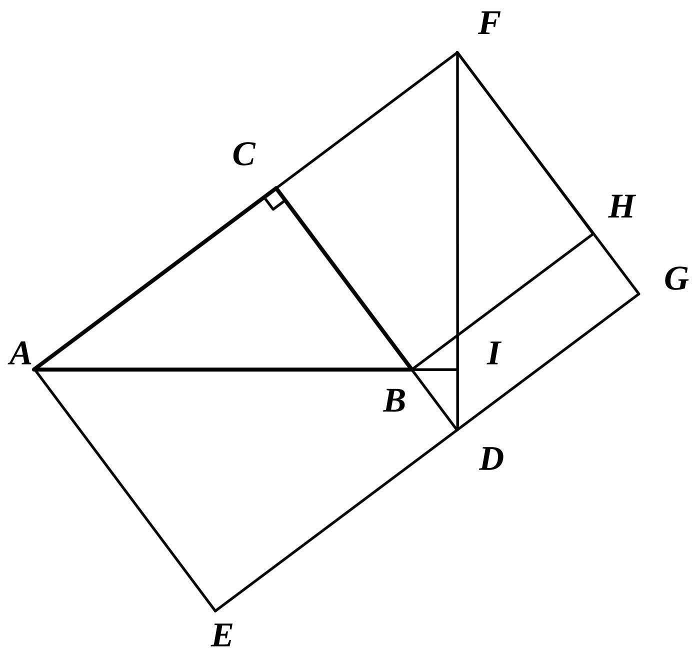
勾股定理證明-G211

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 邊為邊，向下作正方形 $ACDE$ 。
2. 延長 $\overline{AC}$ 使 $\overline{CF}=\overline{BC}$
3. 過 F 作 $\overline{CD}$ 平行線 $\overline{FG}$ ，使 $\overline{FG}=\overline{CD}$ 。
4. 過 B 作 $\overline{CF}$ 平行線交 $\overline{FG}$ 於 H 。
5. 延長 $\overline{AB}$ 交 $\overline{FD}$ 於 I 。



【求證過程】

先從直角三角形 ABC 的兩邊作向下、向外作正方形，再補至長方形。接著利用三角形面積選擇不同底高計算，再透過乘法的分配律，可以證明斜邊的平方即為兩正方形的面積和，來證明畢氏定理。

1. 首先推得兩個等式：

$$\square AEGF = 2\times\Delta ADF = \overline{FD}\times\overline{AI} = \overline{AF}\times\overline{AE},$$

及

$$\square BDGH = 2\times\Delta BDF = \overline{FD}\times\overline{BI} = \overline{BD}\times\overline{DG}.$$

2. 不難發現 ΔABC 和 ΔDFC 全等，以下是證明：

因為

$$\overline{CA}=\overline{CD}(\because \text{正方形的兩邊}),$$

並且

$$\overline{BC}=\overline{CF}(\because \text{正方形的兩邊}),$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle DCF,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta DFC\,(\text{SAS 全等}),$$

因此

$$\overline{AB} = \overline{DF}.$$

3. 綜合以上就可以推導面積等式：

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{FD} \times \overline{AB} \\ &= \overline{FD} \times (\overline{AI} - \overline{BI}) \\ &= \overline{FD} \times \overline{AI} - \overline{FD} \times \overline{BI} \\ &= \overline{AE} \times \overline{AF} - \overline{BD} \times \overline{DG} \\ &= \square ACDE + \square BCFH \\ &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式。

【註與心得】

1. 來源：此證明是華盛頓州的 Arthur Colburn 給出。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 179 號
2. 心得：此證明善用了一個三角形面積選擇不同底高來計算下的兩種表示法，再透過乘法的分配性質來證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。