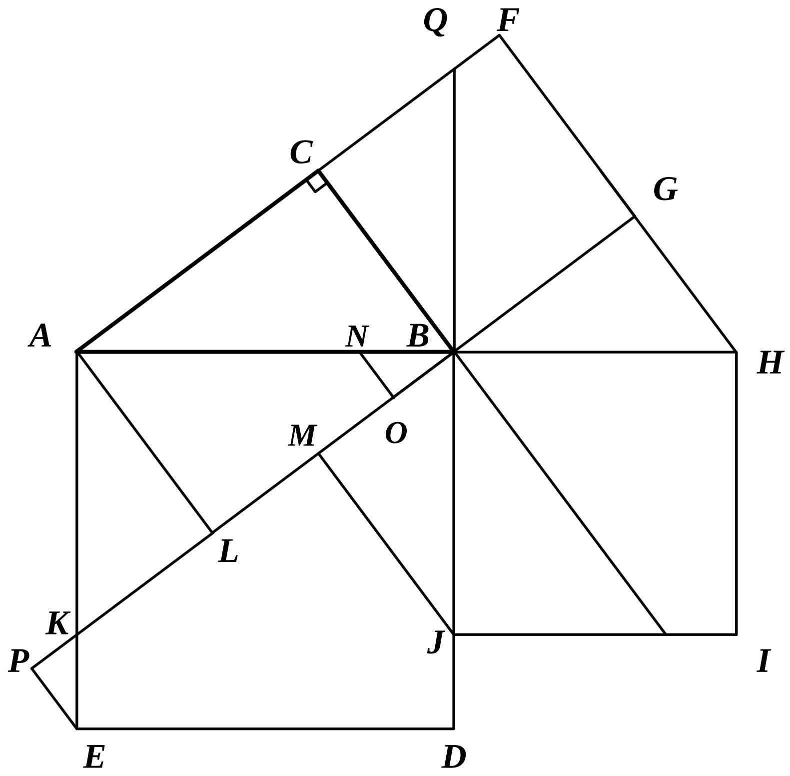
勾股定理證明-G179

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $ABDE$ 及正方形 $BCFG$。
2. 在 $\overline{AB}$ 延伸線上取一點 H，使 $\overline{BH}$ 與 $\overline{AC}$ 等長，並以 $\overline{BH}$ 為正方形的一邊，向下作正方形 $BHIJ$。
3. 延伸 $\overline{GB}$，交 $\overline{AE}$ 於 K。並過 A 作 $\overline{BK}$ 的垂直線，垂足 L，同樣地過 D 作 $\overline{BK}$ 的垂直線，垂足 M。
4. 在 $\overline{AB}$ 線段上取一點 N，使得 $\overline{BN}$ 與 $\overline{KE}$ 等長。並過 N 作 $\overline{BK}$ 的垂直線，垂足 O。
5. 再從 $\overline{BK}$ 延伸線上取一點 P 使得 $\overline{KP}$ 與 $\overline{NO}$ 等長，連 $\overline{PE}$。
6. 最後延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{CF}$ 於 Q，延伸 $\overline{CB}$ 交 $\overline{IJ}$ 於 R。



【求證過程】

此證明屬拼圖式證明，我們先作以直角三角形三邊的三個正方形，再以適當的輔助線將正方形切割，其中大正方形被切割為五塊。接著我們要透過全等圖形的證明，確定可以用這五塊拼出兩個小的正方形，也就以面積的方式證明了畢氏定理的關係式。

1. 我們不難發現 $\Delta ABC, \Delta BAL, \Delta DBM, \Delta BRJ$ 這四個三角形為全等三角形，以下我們給出證明：

   其中 $\Delta ABC, \Delta BAI$ 是因為

   $$\overline{AB} = \overline{BA} \text{ (共用邊)},$$

   並且

   $$\angle ACB = 90^{\circ} = \angle BLA,$$

以及

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle ABL,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta BAI \text{ (AAS 全等).}$$

其中另一組 $\Delta ABC, \Delta DBM$ 是因為

$$\overline{AB} = \overline{BD} \text{(正方形的邊),}$$

並且

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle DMB,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle CAB \\ &= 90^\circ - \angle ABL (\because \Delta ABC \cong \Delta BAL) \\ &= \angle DBM,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DBM \text{ (AAS 全等).}$$

還有一組 $\Delta ABC, \Delta BRJ$ 是因為

$$\overline{AC} = \overline{BJ},$$

並且

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle BJR,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle RBJ \\ &= \angle BRJ,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta BRJ \text{ (AAS 全等).}$$

2. 也可以看出 $\Delta AKL, \Delta BQC$ 為全等三角形，以下給出證明：
因為

$$\overline{AL} = \overline{BC} (\because \Delta ABC \cong \Delta BAL),$$

並且

$$\angle ALK = 90^\circ = \angle BCQ,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle LAK &= 90^\circ - \angle BAL \\ &= 90^\circ - \angle ABC (\because \Delta ABC \cong \Delta BAL) \\ &= \angle QBC,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta AKL \cong \Delta BQC \text{ (ASA 全等).}$$

3. 而 $\Delta EKP, \Delta BNO$ 亦為全等三角形，以下是它的證明：
因為

$$\overline{KE} = \overline{BN},$$

並且

$$\overline{KP}=\overline{NO},$$

以及

$$\begin{aligned}\angle PKE&=\angle LKA\\&=90^\circ-\angle KAL\\&=\angle NBO,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta EKP\cong\Delta BNO\,(\text{SAS 全等}).$$

4. 而梯形 $DEPM$ 及梯形 $BRIH$ 為全等的四邊形，以下是它的證明：

因為

$$\begin{aligned}\overline{DM}&=\overline{BJ}(\because \Delta DBM\cong\Delta BRJ)\\&=\overline{BH}(\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{DE}&=\overline{BD}(\because \text{正方形的邊})\\&=\overline{BH}(\because \Delta DBM\cong\Delta BRJ),\end{aligned}$$

以及

$$\angle PMD=90^\circ=\angle BHI,$$

還有

$$\begin{aligned}\angle MDE&=90^\circ-\angle MDB\\&=90^\circ-\angle RBJ(\because \Delta BDM\cong\Delta BRJ)\\&=\angle RBH,\end{aligned}$$

再加上

$$\angle EPM=90^\circ=\angle RIH,$$

所以

$$\text{梯形}DEPM\cong\text{梯形}BRIH\,(\text{SSAAA 全等}).$$

5. 最後看出梯形 $ALON$,梯形 $BGFQ$ 亦為全等的四邊形，以下我們給出證明：

因為

$$\begin{aligned}\overline{BG}&=\overline{BC}(\because \text{正方形的邊})\\&=\overline{AL}(\because \Delta BQC\cong\Delta AKL),\end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{AN}&=\overline{AB}-\overline{NB}\\&=\overline{AE}-\overline{KE}(\because \text{正方形的邊及}\Delta BNO\cong\Delta EKP)\\&=\overline{AK}\\&=\overline{BQ}(\because \Delta AKL\cong\Delta BQC),\end{aligned}$$

以及

$$\angle QFG=90^\circ=\angle NOL,$$

還有

$$\angle FGB = 90^\circ = \angle OLA,$$

再加上

$$\angle QBG = 90^\circ - \angle ABL$$
$$= \angle BAL,$$

所以

$$\text{梯形}ALON \cong \text{梯形}BGFQ\,(\text{SASAA 全等}).$$

6. 綜合以上我們可以推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\Box ABDE &= \Delta AKL + \text{梯形}ALON + \Delta BNO + DEKM + \Delta DBM \\ &= \Delta BQC + \text{梯形}BGFQ + \Delta EKP + DEKM + \Delta BRJ \\ &= \left(\Delta BCQ + \text{梯形}BGFQ\right) + \left[\left(\Delta EKP + DEKM\right) + \Delta BRJ\right] \\ &= \Box BCFG + \left(\text{梯形}BHIR + \Delta BRJ\right) \\ &= \Box BCFG + \Box BHIJ,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明的作者姓名不詳，記載於 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇中的編號第 179 號。
2. 心得：此證明亦屬於拼圖式的證明法，證明對應的拼片為全等的圖形，再透過面積關系式即可以證明出畢氏定理。證明過程中的切割方式應用到延伸線對頂角相等，只要取對應等長再作垂直就可以輕易得到一個對應全等的三角形拼片。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：
   (1) 在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。
   (2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：