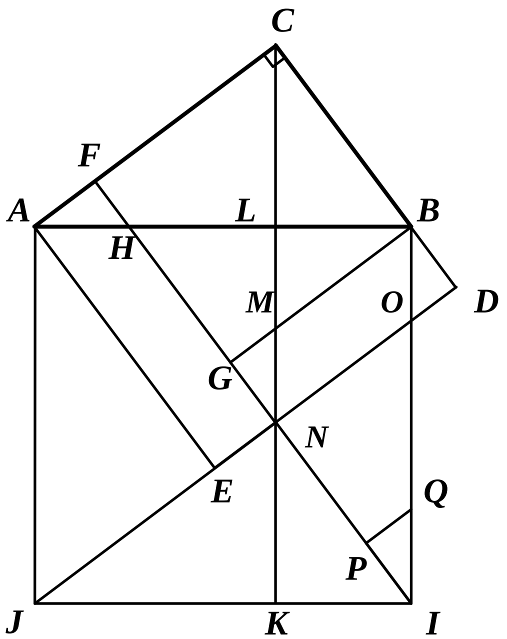
勾股定理證明-G138

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$ 及 $\overline{BC}$ 為正方形的一邊，分別向內作正方形 $ACDE$ 及正方形 $BCFG$。其中 $\overline{FG}$ 交 $\overline{AB}$ 於 H。
2. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $ABIJ$。
3. 並過 C 作 $\overline{IJ}$ 的垂直線垂足 K，交 $\overline{AB}$ 於 L，交 $\overline{BG}$ 於 M，交 $\overline{DE}$ 於 N。其中 $\overline{BI}$ 交 $\overline{DE}$ 於 O。連 $\overline{GI}$，連 $\overline{EJ}$。
4. 最後在 $\overline{BI}$ 上取一點 Q，使 $\overline{IQ}$ 與 $\overline{BO}$ 等長。並過 Q 作 $\overline{GI}$ 的垂直線，垂足為 P。



【求證過程】

此證明為拼圖式證明，我們先在直角三角形的三邊上分別作正方形，接著以輔助線將大正方形切割成數塊，再透過全等證明，就可以使用這些拼片拼成兩個較小的正方形。也就證明了畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta AJE, \Delta JIN, \Delta IBG$ 為全等三角形，以下我們給出證明：

   其中 $\Delta ABC, \Delta AJE$ 是因為

   $$\overline{AB} = \overline{AJ}\text{(正方形的邊)},$$

   並且

   $$\overline{AC} = \overline{AE}\text{(正方形的邊)},$$

   以及

   $$\angle CAB = 90^\circ - \angle BAE = \angle JAE,$$

   所以

   $$\Delta ABC \cong \Delta AJE \text{ (SAS 全等)}.$$

   因此 $\angle AED = 90^\circ = \angle AEJ$, 可以推得 $D-E-J$ 三點共線.

   另一組 $\Delta ABC, \Delta IBG$, 是因為

$$\overline{AB} = \overline{BI}(\text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{BC} = \overline{BG}(\text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle CBA = 90^\circ - \angle ABG = \angle GBI,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta IBG\,(\text{SAS 全等}).$$

因此 $\angle BGN = 90^\circ = \angle BGI$, 可以推得 $G - N - I$ 三點共線.
下一組是看 $\Delta ABC, \Delta JIN$, 因為

$$\overline{AB} = \overline{AJ}(\text{正方形的邊}),$$

並且

$$\begin{aligned}\angle CAB &= 90^\circ - \angle CBA \\ &= 90^\circ - \angle AJE (\because \Delta ABC \cong \Delta AJE) \\ &= \angle NJI,\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA &= 90^\circ - \angle CAB \\ &= 90^\circ - \angle BIG (\because \Delta ABC \cong \Delta IBG) \\ &= \angle JIN,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta JIN\,(\text{ASA 全等}).$$

2. 接著我們看出另一組三角形 $\Delta BHG, \Delta ION$ 的全等性，以下我們給出證明：
因為

$$\overline{BG} = \overline{IN}(\because \Delta IBG \cong \Delta JIN),$$

並且

$$\angle BGH = 90^\circ = \angle INO,$$

以及

$$\angle HBG = 90^\circ - \angle HIB = \angle ION,$$

所以

$$\Delta BHG \cong \Delta ION\,(\text{AAS 全等}).$$

3. $\Delta AHF, \Delta IQP, \Delta BOD$ 亦為全等的三角形，以下我們給個證明：
其中 $\Delta IQP, \Delta BOD$ 是因為

$$\overline{IQ} = \overline{BO},$$

並且

$$\angle BDO = 90^\circ = \angle IPQ,$$

以及

$$
\begin{aligned}
\angle QIP &= \angle OIN \\
&= 90^\circ - \angle NOI \\
&= 90^\circ - \angle BOD (\because \text{對頂角相等}) \\
&= \angle OBD,
\end{aligned}
$$

所以

$$\Delta IQP \cong \Delta BOD \,(\text{AAS 全等}).$$

還有 $\Delta BOD, \Delta AHF$ 是因為

$$
\begin{aligned}
\overline{AF} &= \overline{AC} - \overline{FC} \\
&= \overline{CD} - \overline{CB} (\text{正方形的邊}) \\
&= \overline{BD},
\end{aligned}
$$

並且

$$\angle AFH = 90^\circ = \angle BDO,$$

以及

$$
\begin{aligned}
\angle FAH &= \angle CAB \\
&= 90^\circ - \angle CBA \\
&= \angle OBD,
\end{aligned}
$$

所以

$$\Delta BOD \cong \Delta AHF \;\; (\text{ASA 全等}).$$

4. 綜合以上，我們就可以推導面積關係式：

$$
\begin{aligned}
\square ABIJ &= \Delta AEJ + ABOE + \Delta JIN + ONPQ + \Delta IQP \\
&= (\Delta AEJ + ABOE + \Delta IPQ) + \Delta JIN + ONPQ \\
&= (\Delta ABC + ABOE + \Delta BOD) + (\Delta ABC + ONPQ) \\
&= \square ACDE + (BCFH + \Delta AHF + ONPQ) \\
&= \square ACDE + (BCFH + \Delta IQP + ONPQ) \\
&= \square ACDE + (BCFH + \Delta ION) \\
&= \square ACDE + (BCFH + \Delta BHG) \\
&= \square ACDE + \square BCFG,
\end{aligned}
$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明由 M. Rogot 給出，因為 E. Fourrey 的書《*Curiosities of Geometry*》而聞名。記載於 Loomis 的《勾股定理》書中的幾何篇中編號第 138 號。
2. 心得：此證明亦屬於拼圖式的證明，只要證明對應的拼片為全等圖形，則可以透過面積關係來證明畢氏定理。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：

(1) 在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：