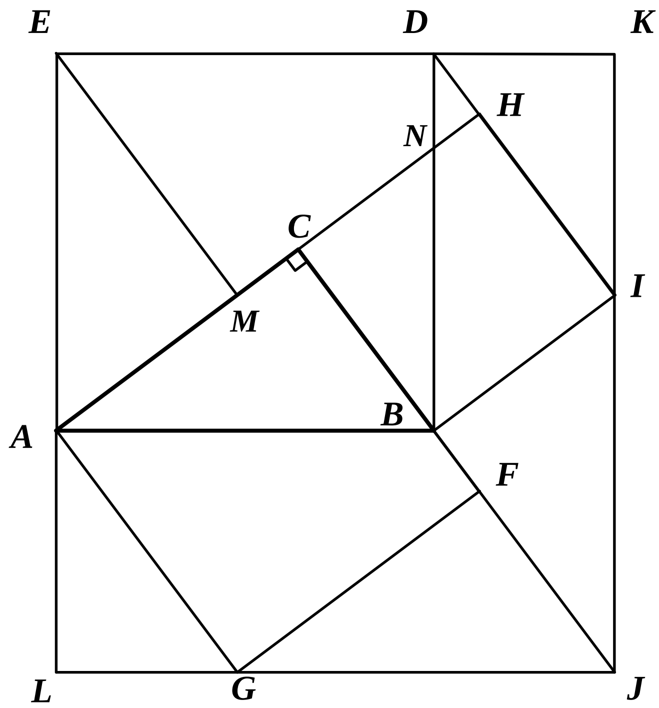
勾股定理證明-G125

【作輔助圖】

1. 以直角三角形的$\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$三邊為邊，分別向內、向內、向外作正方形$ABDE$、正方形$ACFG$以及正方形$BCHI$。其中$\overline{BD}$與$\overline{CH}$交於$N$。
2. 在$\overline{CF}$延伸線上取一點J，使$\overline{BJ}$與$\overline{AB}$等長。
3. 連$\overline{JI}$，並延伸直線與$\overline{ED}$的延伸線交於K。連$\overline{JG}$並延伸與$\overline{EA}$的延伸線交於L。
4. 過E作$\overline{AC}$的垂線，垂足M。最後連$\overline{DI}$(之後將證明$D-H-I$三點共線)。



【求證過程】

先以一個大長方形將直角三角形ABC及其三邊所製造的正方形圍住，並且以輔助線適當地將長方形分割成正方形、直角三角形以及梯形。在證明其中幾個三角形及梯形有全等性質後，以兩種不同的方式分割長方形，即可以從面積關係當中推導出畢氏定理關係式。

1. 不難發現$\Delta ABC,\Delta GJF,\Delta JIB,\Delta DBI,\Delta EAM$為全等三角形，以下我們給出證明：
   首先因為
   $$\overline{BC}=\overline{BI}\text{ (正方形的邊)},$$
   並且
   $$\overline{AC}=\overline{BJ},$$
   以及
   $$\angle ACB=90^\circ=\angle JBI\ ,$$
   所以
   $$\Delta ABC\cong\Delta JBI\ \text{ (SAS 全等)}.$$

   另一方面因為

$$\angle ACB = 90^{\circ} = \angle GFJ,$$

並且

$$\overline{AC} = \overline{GF} \text{ (正方形的邊)},$$

以及

$$\overline{CB} = \overline{CJ} - \overline{BJ} = \overline{CJ} - \overline{CF} = \overline{FJ},$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta GFJ \text{ (SAS 全等)}.$$

再來是因為

$$\angle ACB = 90^{\circ} = \angle EMA,$$

並且

$$\angle CAB = 90^{\circ} - \angle EAM = \angle AEM,$$

以及

$$\overline{AB} = \overline{EA} \text{ (正方形的邊)},$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EAM \text{ (AAS 全等)}.$$

最後因為

$$\overline{AB} = \overline{BD} \text{ (正方形的邊)},$$

並且

$$\overline{BC} = \overline{BI} \text{ (正方形的邊)},$$

以及

$$\angle CBA = 90^{\circ} - \angle NBC = \angle DBI$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DBI \text{ (SAS 全等)}.$$

我們也可以因為 $\angle BID = 90^{\circ} = \angle BIH$, 所以推得 $D - H - I$ 三點共線.

2. 接下來我們看出 $\Delta AGL, \Delta IDK$ 為全等三角形，以下是它的證明：
其中因為

$$\begin{aligned} \overline{ID} &= \overline{CA} \ (\text{因為} \Delta ABC \cong \Delta DBI) \\ &= \overline{AG} \ (\text{因為是正方形的邊}), \end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned} \angle DIK &= 90^{\circ} - \angle BIJ \\ &= 90^{\circ} - \angle EAM \ (\text{因為} \Delta JIB \cong \Delta EAM) \\ &= \angle GAL, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \angle KDI &= 90^{\circ} - \angle IDB \\ &= 90^{\circ} - \angle FGJ \ (\text{因為} \Delta DBI \cong \Delta GJF) \\ &= \angle AGL, \end{aligned}$$

所以

$$\Delta AGL \cong \Delta IDK \text{ (SAS 全等).}$$

3. 再來可以看到梯形 $AGFB$ 全等於梯形 $EMHD$ ，以下我們給出證明：
因為有

$$\begin{aligned}\overline{AG} &= \overline{AC}\ (\text{因為是正方形的邊})\\ &= \overline{EM}\,(\text{因為}\Delta ABC \cong \Delta EAM),\end{aligned}$$

還有

$$\overline{AB} = \overline{ED}\ (\text{因為是正方形的邊}),$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{GF} &= \overline{AC}\ (\text{因為是正方形的邊})\\ &= \overline{AM} + \overline{MC} = \overline{BC} + \overline{MC}\,(\text{因為}\Delta ABC \cong \Delta EAM)\\ &= \overline{HC} + \overline{CM}\,(\text{因為是正方形的邊})\\ &= \overline{HM},\end{aligned}$$

還有

$$\angle AGF = 90^{\circ} = \angle EMH\,,$$

跟

$$\begin{aligned}\angle BAG &= 90^{\circ} - \angle CAB\\ &= 90^{\circ} - \angle MEA\ (\text{因為}\Delta ABC \cong \Delta EAM)\\ &= \angle DEM,\end{aligned}$$

所以可以得到

$$\text{梯形 } AGFB \cong \text{梯形 } EMHD\ \text{(SASAS 全等).}$$

4. 綜合以上全等的證明，再透過面積等式的推導我們可以得到：

$$\begin{aligned}&\text{正方形}ABDE + 2\Delta ALG + 3\Delta GFJ + \text{梯形}AGFB\\ &= \text{長方形}EKJL\\ &= \text{正方形}BCHI + \text{正方形}ACFG + 2\Delta ALG + 3\Delta GFJ + \text{梯形}EMHD,\end{aligned}$$

也就是

$$\text{正方形}ABDE = \text{正方形}BCHI + \text{正方形}ACFG\,,$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2\,.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 125 號。
2. 心得：不同於其它拼圖式證明是直接將兩個正方形分割再拼成兩個小正方形，這個證明方式是用相同的拼片將長方形留下大正方形或兩個小正方形，來證明面積的相等。算是一種反面思考的證明法式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●		●	

4. 補充：

(1) 在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。

(2) 此證明為拼圖證明，其拼法可參考下圖：