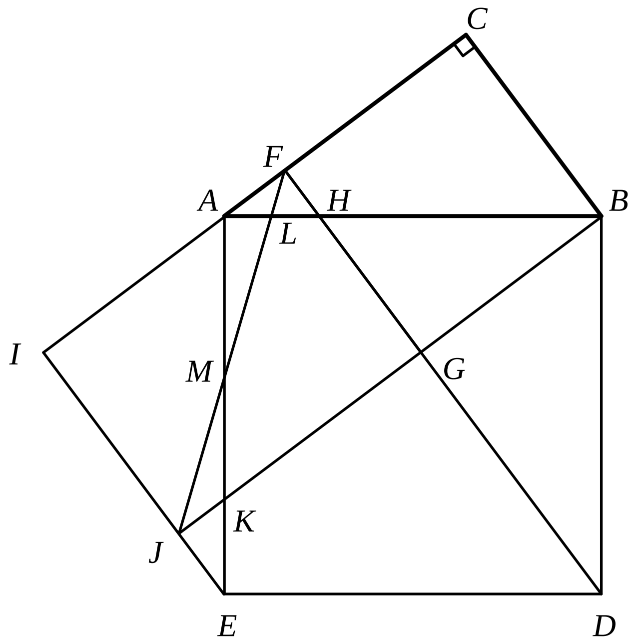
勾股定理證明-G115

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 邊為邊，向外作正方形 $ABDE$ ；再以 $\overline{BC}$ 為邊，向內作正方形 $BCFG$ ，其中 $\overline{FG}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 H ；連 $\overline{GD}$ 。
2. 接著延伸 $\overline{CA}$ 並取一點 I 使得 $\overline{AI}=\overline{BC}$ ，連 $\overline{IE}$ 。再延伸 $\overline{BG}$ 並交 $\overline{AE}$ 於 J ，交 $\overline{AE}$ 於 K 。
3. 最後連 $\overline{JF}$ 分別交 $\overline{AB}$ 於 L ，交 $\overline{AE}$ 於 M 。



【求證過程】

先作適當的輔助線，將直角三角形往外作出正方形及正方形邊上全等的直角三角形。我們利用全等及面積等式推導可以證明大正方形的面積等於小一正方形的面積以及其中一個梯形的面積和。而這個梯形的面積剛好又等於是另一股作出來的小正方形面積，也因此我們就證明了畢氏定理關係式。

1. 不難發現三角形 $\Delta ABC \cong \Delta DBG \cong \Delta EAI \cong \Delta JFG$ 為全等的直角三角形，以下我們給出證明：

   因為
   $$\overline{AB}=\overline{BD}(\because \text{正方形的邊}),$$
   而且
   $$\angle CBA = 90^\circ - \angle ABK = \angle DBG,$$
   以及
   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle BGD,$$
   所以可以得到
   $$\Delta ABC \cong \Delta DBG \ (\text{AAS 全等}).$$
   接著考慮 $\Delta ABC \cong \Delta EAI$ ：

   其中因為

$$\overline{AB} = \overline{AE} (\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\overline{AI} = \overline{CB},$$

以及

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle IAE = \angle AEI,$$

所以可以得到

$$\Delta ABC \cong \Delta EAI \text{ (AAS 全等)}.$$

然後看$\Delta ABC \cong \Delta JFG$ ：

其中因為

$$\overline{BC} = \overline{FG} (\because \text{正方形的邊}),$$

而且有

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle FGJ,$$

以及

$$\begin{aligned}
\overline{AC} &= \overline{AF} + \overline{FC} \\
&= \overline{AF} + \overline{CB} (\because \text{正方形的邊}) \\
&= \overline{AF} + \overline{AI} \ (\because \Delta ABC \cong \Delta EAI) \\
&= \overline{FI} \\
&= JG \ (\because \text{長方形} IFGJ \text{的邊}),
\end{aligned}$$

所以可以得到

$$\Delta ABC \cong \Delta JFG \text{ (SAS 全等)}.$$

再綜合以上四個全等式，可以得到

$$\Delta ABC \cong \Delta DBG \cong \Delta EAI \cong \Delta JFG.$$

2. 也可以看到$\Delta AHF \cong \Delta EKJ$ ，以下我們給出證明：

其中因為

$$\begin{aligned}
\overline{AF} &= \overline{CA} - \overline{CF} \\
&= \overline{IE} - \overline{FB} (\because \Delta ABC \cong \Delta EAI \text{以及正方形的邊}) \\
&= \overline{IE} - \overline{IJ} (\because \text{長方形} BCIJ \text{的邊}) \\
&= \overline{JE},
\end{aligned}$$

而且

$$\angle AFH = 90^\circ = \angle KJE,$$

以及

$$\begin{aligned}
\angle KEJ &= \angle AEI \\
&= \angle CAB \ (\because \Delta ABC \cong \Delta EAI) \\
&= \angle FAH,
\end{aligned}$$

所以可以得到

$$\Delta AHF \cong \Delta EKJ \text{ (ASA 全等)}.$$

3. 接著發現$\Delta BKA \cong \Delta DHB$亦為全等的三角形，以下是它的證明：
因為
$$\overline{AB} = \overline{BD} (\because \text{正方形的邊}),$$
而且
$$\begin{aligned} \overline{AK} &= \overline{AE} - \overline{KE} \\ &= \overline{AB} - \overline{AH} \ (\because \text{正方形的邊且} \Delta AHF \cong \Delta EKJ) \\ &= \overline{HB}, \end{aligned}$$
以及
$$\angle BAK = 90^\circ = \angle HBD,$$
所以可以得到
$$\Delta BKA \cong \Delta DHB \ (\text{SAS 全等}).$$

4. 在證明完三角形全等後，現在考慮面積之間的關係。其中我們發現ΔBDG面積與四邊形$AKGH$面積相等，以下給出證明，這利用到剛剛證明的全等：
$$\begin{aligned} \Delta BDG &= \Delta HBD - \Delta HBG \\ &= \Delta KAB - \Delta HBG (\because \Delta HBD \cong \Delta KAB) \\ &= \text{四邊形} AKGH. \end{aligned}$$

5. 而梯形$JEDF$面積=$\overline{AC}^2$也就是以$\overline{AC}$為邊的正方形面積，以下是它的證明：
梯形$JEDF$面積
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times \left(\overline{JE} + \overline{FD} \right) \times \left(\overline{JG} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\overline{IE} - \overline{IJ} + \overline{FG} + \overline{GD} \right) \times \left(\overline{AC} \right) (\because \Delta ABC \cong \Delta JFG) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\overline{AC} - \overline{FG} + \overline{FG} + \overline{AC} \right) \times \left(\overline{AC} \right) (\because \text{長方形} FGJI \text{的兩邊而且} \Delta ABC \cong \Delta EAI \cong \Delta DBG) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(2\overline{AC} \right) \times \left(\overline{AC} \right) \\ &= \overline{AC}^2. \end{aligned}$$

6. 因此，我們就可以使用上面的全等關係以及面積等式來做以下推導：
$$\begin{aligned} \square ABDE &= AKHG + KEDG + \Delta BGD + \Delta HGB \\ &= AKHG + KEDG + \Delta ABC + \Delta HGB \\ &= AKHG + KEDG + (BCFH + \Delta AFL + \Delta FLH) \\ &= KEDG + AKHG + (BCFG + \Delta HGB) + (\Delta AFL + \Delta FLH) \\ &= KEDG + \Delta BGD + \square BCFG + \Delta KJE \\ &= KEDG + \Delta FJG + \square BCFG + \Delta KJE \\ &= (KEDG + \Delta FJG + \Delta KJE) + \square BCFG \\ &= \text{梯形} JEDH + \square BCFG, \end{aligned}$$

也就是畢氏定理的關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明是一位 West Phila. 的中學生 Joseph Zelson 所給出。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中幾何篇的編號第 115 號。
2. 心得：這個證明初看到會覺得複雜，輔助線將圖形切割成十一塊，並且要先證明其中的一塊梯形面積等於正方形面積，並非那麼直觀。使得在教學上的難度提高。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。