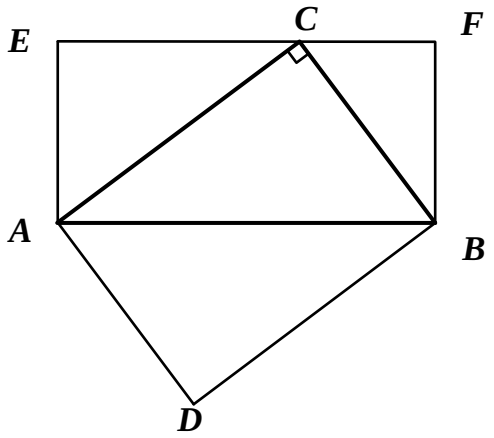
勾股定理證明-Bog008

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC ，從 B 作 $\overline{AC}$ 的平行線，並從 A 作 $\overline{BC}$ 平行線，兩線交於 D 。
2. 分別過 A,B 作 $\overline{AB}$ 的垂直線，並過 C 作 $\overline{AB}$ 的平行線，與兩垂直線交於 E,F 。



【求證過程】

先以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為長方形的一邊，作長方形使直角三角形的頂點落在長方形的對邊上。另外以 $\overline{AB}$ 為長方形的對角線，再作一個長方形。我們可以先證明輔助線切割出來的四個三角形皆為相似的直角三角形，再利用大五邊形的兩種面積拆解計算方式，再透過簡單的代數運算整理，即可得到畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC,\Delta BAD$ 為全等的直角三角形，以下我們給個證明：
   因為
   $$\overline{AB}=\overline{BA}\ (\text{共用邊}),$$
   而且
   $$\angle CAB=\angle DBA\ (\text{平行線}\ \overline{AC},\overline{BD}\ \text{的內錯角相等}),$$
   以及
   $$\angle CBA=\angle DAB\ (\text{也是因為平行線}\ \overline{AC},\overline{BD}\ \text{的內錯角相等}),$$
   所以
   $$\Delta ABC\cong\Delta BAD\,(\text{ASA 全等}),$$
   也因此四邊形 $ACBD$ 為長方形.
2. 接著看出 $\Delta ABC,\Delta CAE,\Delta BCF$ 為相似三角形，以下是它的證明：
   其中 $\Delta ABC,\Delta CAE$ 相似是因為
   $$\angle CAB=\angle ECA\,(\text{因為平行線}\ \overline{AB},\overline{EF}\ \text{的內錯角相等}),$$
   並且
   $$\angle CAE=90^\circ-\angle CAB=\angle CBA,$$
   所以
   $$\Delta ABC\sim\Delta CAE\ (\text{AA 相似}).$$
   同理有 $\Delta ABC\sim\Delta BCF$.
3. 在這裡為了代數運算方便我們將直角三角形 ABC 的三邊長分別以

$\overline{BC}=a,\overline{AC}=b,\overline{AB}=c$ 表示。

然後就可以利用相似形的特性，也就是因為有 $\Delta CAE\sim\Delta ABC$, 所以

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AE}=\frac{ab}{c},\frac{\overline{EC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{EC}=\frac{b^2}{c}.$$

同理因為 $\Delta BCF\sim\Delta ABC$, 所以 $\frac{\overline{CF}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{CF}=\frac{a^2}{c}.$

4. 最後由五邊形 $ADBFE$ 面積的兩種拆解法推出畢氏定理關係式：

第一，

$$\text{五邊形 } ADBFE=\square ABFE+\Delta ABD.$$

第二，

$$\text{五邊形 } ADBFE=\square ACBD+\Delta BCF+\Delta CAE.$$

而這兩個方式所得到的面積必然相同，可以得到以下關係式：

$$\frac{ab}{c}\cdot\left(\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}\right)+\frac{1}{2}a\cdot b=ab+\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{c}\cdot\frac{a^2}{c}+\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{c}\cdot\frac{b^2}{c},$$

左右同乘 $\frac{2c^2}{ab}$ 後可以得到

$$2a^2+2b^2+c^2=2c^2+a^2+b^2,$$

最後移項整理可得

$$a^2+b^2=c^2.$$

此即為畢氏定理關係式.

【註與心得】

1. 來源：此證明收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #08。
2. 心得：這個證明過程使用到的技巧在我們國中的課程裡就已經學習過，所以可以提供給國中生參考，可以熟悉相似形的邊長計算方式。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●			

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。