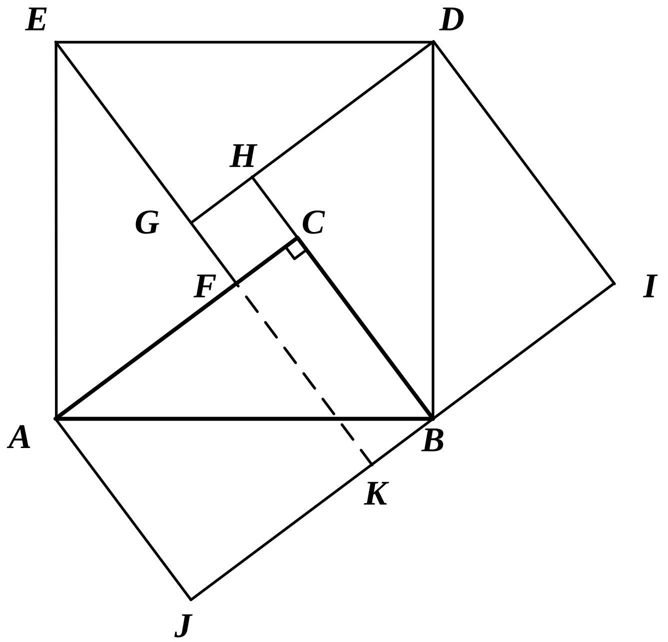
勾股定理證明-Bog010

【作輔助圖】

1. 先以直角三角形 ABC 以 $\overline{AB}$ 為向內作正方形 $ABDE$ 。
2. 接著過 E 對 $\overline{AC}$ 作垂直線，並交 $\overline{AC}$ 於 F ，再過 D 對 $\overline{AF}$ 作垂直線，並交 $\overline{AF}$ 於 G 。然後延伸 $\overline{BC}$ 交 $\overline{DG}$ 於 H 。
3. 接著過 D 作 $\overline{HB}$ 的平行線，並過 B 作 $\overline{GD}$ 的平行線，交於 I 。
4. 以及過 A 作 $\overline{HB}$ 的平行線，交 $\overline{IB}$ 的延伸線於 J 。
5. 最後延伸 $\overline{EF}$ 交 $\overline{BJ}$ 於 K 。



【求證過程】

先將直角三角形 ABC 以斜邊為邊向內作正方形，接著若以適當的輔助線將大正方形切割，經過切割能得到四個全等的直角三角形及一個正方形；接著想像我們可以移動其中兩塊直角三角形，移動後非常清楚地它們恰好會變成兩個小的正方形。也就證明了畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta EAF, \Delta DEG$ 為全等的直角三角形，以下我們給出證明：

   因為

   $$\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{DE} \ (\because \text{正方形的邊}),$$

   而且

   $$\angle ACB = \angle EFA = \angle DGE = 90^\circ,$$

   以及

   $$\begin{aligned} \angle CAB = 90^\circ - \angle EAF &= \angle AEF \\ = 90^\circ - \angle DEG &= \angle EDG, \end{aligned}$$

   所以可以推得

   $$\Delta ABC \cong \Delta EAF \cong \Delta DEG \ (\text{AAS 全等}).$$

2. 也可以發現 $\Delta ABC, \Delta BDH$ 為全等，我們給個證明：

因為

$$\overline{AB}=\overline{BD},$$

而且

$$\angle CAB=90^\circ-\angle CBA=\angle DBH,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle CBA&=90^\circ-\angle CAB\\&=90^\circ-\angle GDE(\because \Delta ABC\cong\Delta DEG)\\&=\angle DBH,\end{aligned}$$

所以可以推得

$$\Delta ABC\cong\Delta BDH\ (\text{ASA 全等}).$$

3. 接著發現 $\overline{DI}=\overline{HB}$ 且 $\overline{DH}=\overline{BI}$ ，以下是它們的證明：
   因為

$$\angle DHB=90^\circ=\angle HDI(\because \overline{HB}\text{平行於}\overline{DI},\text{同側內角互補}),$$

   而且

$$\angle DIB=90^\circ=\angle HBI(\because \overline{BI}\text{平行於}\overline{GD},\text{同側內角互補}),$$

   所以四邊形 $HDIB$ 是長方形，也就可以得到 $\overline{DI}=\overline{HB},\ \overline{DH}=\overline{BI}.$
4. 考慮 $\Delta BHD,\Delta DBI$ 的全等，證明如下：
   因為

$$\overline{BD}=\overline{DB}(\because \text{共用邊}),$$

   而且

$$\overline{DI}=\overline{HB},$$

   以及

$$\overline{DH}=\overline{BI},$$

   所以可以推得

$$\Delta BHD\cong\Delta DBI\ (\text{SSS 全等}).$$

5. 也不難發現 $\overline{AJ}=\overline{CB}$ 以下給個證明：
   因為

$$\angle ACB=90^\circ=\angle CAJ(\because \overline{AJ}\text{平行於}\overline{CB},\text{同側內角互補}),$$

   而且

$$\angle CBJ=90^\circ=\angle JBC(\because \overline{AJ}\text{平行於}\overline{BC},\text{同側內角互補}),$$

   所以四邊形 $ACBJ$ 是長方形，因此 $\overline{AJ}=\overline{BC}$ 且 $\overline{AC}=\overline{JB}.$
6. 還有 $\Delta ABC,\Delta BAJ$ 亦為全等的直角三角形，以下給出證明：
   因為

$$\overline{AJ}=\overline{BC},$$

   而且

$$\overline{AC}=\overline{JB},$$

   以及

$$\overline{AB}=\overline{BA}(\because \text{共用邊}),$$

所以可以推得

$$\Delta ABC \cong \Delta BAJ \text{ (SSS 全等)}.$$

7. 不難發現四邊形 $AFKJ$ 及四邊形 $DGKI$ 皆為正方形, 這是因為四邊形 $AFKJ$ 是長方形($\because$ 四個角皆直角)，而且 $\overline{AF}=\overline{AJ}(\because \Delta EAF \cong \Delta BAJ)$，所以就可以推論出四邊形 $AFKJ$ 是正方形。

   也同理因為四邊形 $DIKG$ 是長方形($\because$ 四個角皆直角)，而且 $\overline{GD}=\overline{DI}(\because \Delta DEG \cong \Delta DBI)$，也就可以推論出四邊形 $DGKI$ 是正方形。

8. 最後從面積等式推導出畢氏定理：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABC+\Delta EAF+\Delta DEG+\Delta BDH+CFGH\\ &= \Delta ABC+\Delta BAJ+\Delta DBI+\Delta BDH+CFGH\\ &= (\Delta ABC+\Delta BAJ-BCFK)+(BCFK+\Delta DBI+\Delta BDH+CFGH)\\ &= \square AFJK+\square DGKI,\end{aligned}$$

   也就是畢氏定理關係式

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是一本 1830 年《算法新書》所記載，作者是十八、十九世紀的日本數學家千葉胤秀與其師長谷川寬。收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #10。
2. 心得：在教學現場中這個證明可以搭配動態的方式來呈現，不論是以拼圖或是以電腦輔助都是很好的選擇。撇開較嚴格地證明這些三角形會全等，重新拼湊而得的圖形是兩個正方形，事實上都是學生們直觀且容易接受的。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。