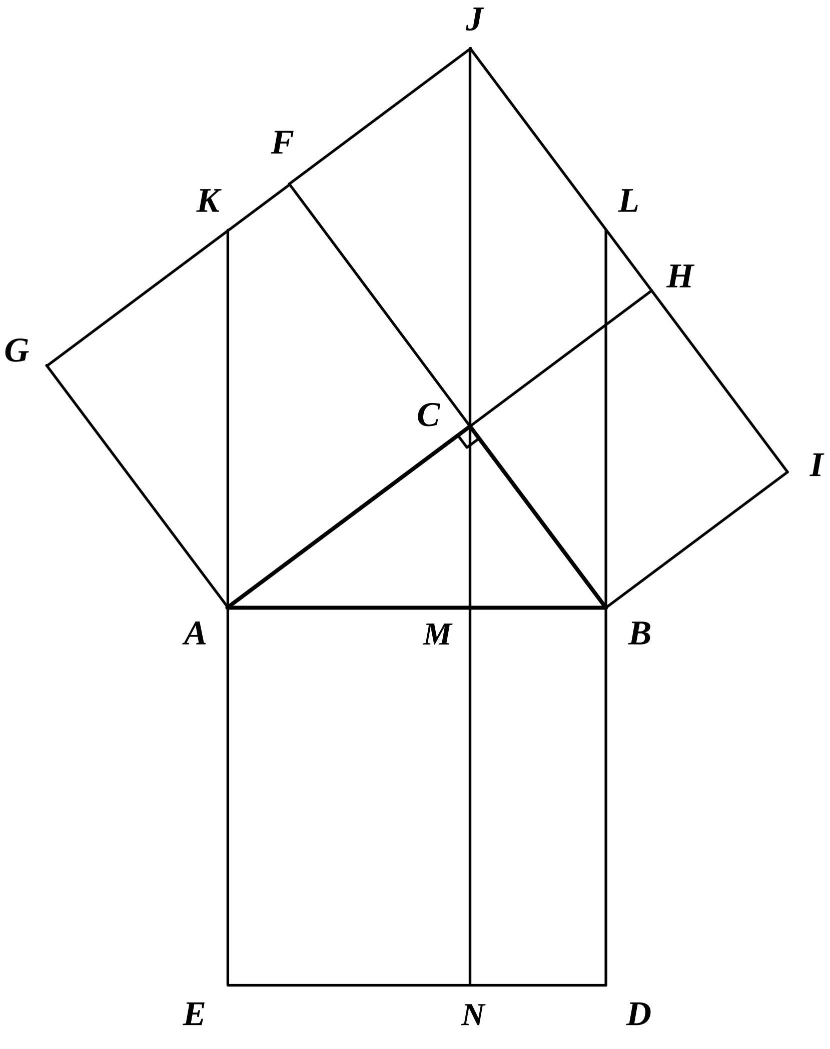
勾股定理證明-Bog012

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 三邊為邊，向外作正方形 $ABDE$ 、正方形 $ACFG$ 以及正方形 $BCHI$ 。
2. 接著延伸 $\overline{GF}$ 及延伸 $\overline{IH}$ 相交於 J 。
3. 然後延伸 $\overline{EA}$ 交 $\overline{GJ}$ 於 K ，並且延伸 $\overline{DB}$ 交 $\overline{IJ}$ 於 L 。
4. 最後連 $\overline{JC}$ 並延伸，與 $\overline{AB}$ 交於 M ，與 $\overline{DE}$ 交於 N 。



【求證過程】

直角三角形 ABC 的三邊為邊往外作三個正方形，並作適當的輔助線後，我們要證明那二塊小正方形的面積和等於大正方形的面積。而為了達到這個目的我們必須先證明一組直角三角形的全等。

接著以推移的概念說明兩個小正方形各別有對應的平行四邊形面積和他們相等，並且這兩個平行四邊形的面積也各別與大正方形分割出的兩個長方形面積相等，也就可以推論出小正方形的面積和等於大正方形，因此得到了畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC,\Delta CJF$ 為全等的三角形，以下給個證明：

   因為

$$\overline{AC}=\overline{CF}(\because \text{正方形的邊}),$$

而且

$$\overline{BC}=\overline{CH}(\because \text{正方形的邊})$$
$$=\overline{FJ}\ (\because \text{長方形的邊}),$$

以及

$$\angle ACB=90^\circ=\angle CFJ,$$

所以可以推得

$$\Delta ABC\cong\Delta CJF\ (\text{SAS 全等}).$$

2. 可以看到 $\overline{KA}//\overline{JC}$, 因為有

$$\begin{aligned}\angle KAC&=90^\circ-\angle CAB\\&=90^\circ-\angle JCF\ \left(\because \Delta ABC\cong\Delta CJF\right)\\&=90^\circ-\left(\angle ACJ-90^\circ\right)\\&=180^\circ-\angle ACJ,\end{aligned}$$

所以可以利用同側內角互補來說明 $\overline{KA}//\overline{JC}$.

3. 接著考慮正方形 $ACFG$ 與平行四邊形 $ACJK$ 面積相等，以下是它的證明：
因為

$$\overline{KJ}//\overline{AC}$$

並且

$$\overline{AK}//\overline{CJ},$$

所以

四邊形 $ACJK$ 是平行四邊形。

若我們以平行四邊形 $ACJK$ 的 $\overline{AC}$ 邊為底，可以推得

$$\text{▱}ACJK=\overline{AC}\cdot\overline{CF}=\overline{AC}\cdot\overline{AC}=\square ACFG,$$

也就是正方形 $ACFG$ 的面積。也可以同理證明正方形 $BCHI$ 與平行四邊形 $BCJL$ 面積相等。

4. 也不難發現平行四邊形 $ACJK$ 與長方形 $AENM$ 面積相等，同樣地我們寫下證明：
若以平行四邊形 $ACJK$ 的 $\overline{JC}$ 邊為底，就可以求得

$$\begin{aligned}\text{▱}KACJ&=\overline{JC}\cdot\overline{AM}\\&=\overline{AB}\cdot\overline{AM}(\because \Delta ABC\cong\Delta CJF)\\&=\overline{AE}\cdot\overline{AM}(\because \text{正方形的邊})\\&=\text{▭}AENM,\end{aligned}$$

再同理可得到平行四邊形 $BCJL$ 與長方形 $BDNM$ 面積相等的證明。

5. 最後再透過面積等式的推導：

$$\begin{aligned}\square ABDE&=\text{▭}AMNE+\text{▭}BMND\\&=\text{▱}AKJC+\text{▱}LBJC\\&=\square ACFG+\square BCHI,\end{aligned}$$

這也就是畢氏定理的關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這個證明可以在美國數學家 Howard Eves 的書《*In Mathematical Circles*》裡的找到。收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #12。
2. 心得：這個證明用到了長方形與平行四邊形面積相等。如果可以再加上動態的方式呈現，會使得過程更顯得有趣且活潑。就像是把兩個小正方形的面積透過 Cavalieri 原理推移成平行四邊形，再將平行四邊形推移成兩個長方形，剛好可以拼出大正方形。這是個介紹推移不影響面積及 Cavalieri 原理的絕佳機會。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。