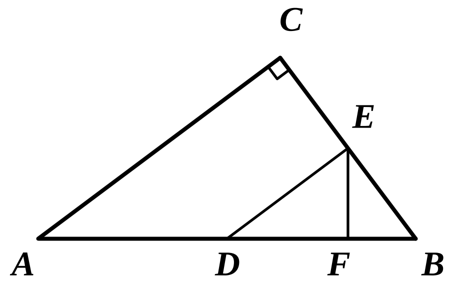
勾股定理證明-Bog013

【作輔助圖】

1. 直角三角形ABC 中，在$\overline{AB}$上任取一點D，並且從D作$\overline{AC}$的平行線，與$\overline{BC}$相交於E。
2. 再過E作$\overline{BD}$的垂直線，與$\overline{AB}$相交於F。



【求證過程】

不難發現這些直角三角形均為相似形，就可以利用相似形的邊長成比例性質，推導出畢氏定理關係式。

1. 我們可以發現$\Delta ABC \sim \Delta DEB$，以下給出證明：

   因為

$$\angle CAB = \angle EDB (\because \overline{DE} // \overline{AC}, \text{同位角相等}),$$

   以及

$$\angle ACB = \angle DEB (\because \overline{DE} // \overline{AC}, \text{同位角相等}),$$

   所以

$$\Delta ABC \sim \Delta DEB \ (\text{AA 相似}).$$

2. 也可以看出$\Delta DEF \sim \Delta BDE$，同樣地給出證明：

   因為

$$\angle EFD = 90^\circ = \angle BED,$$

   以及

$$\angle EDF = \angle BDE (\because \text{共角}),$$

   所以

$$\Delta DEF \sim \Delta BDE \ (\text{AA 相似}).$$

   同理我們可以證明$\Delta EBF \sim \Delta BDE.$也因此現在我們有

$$\Delta ABC \sim \Delta DEB \sim \Delta EFD \sim \Delta BFE.$$

3. 接著利用相似形的性質, 推導邊長比例可以得到一個關係式如下：

   由

$$\frac{\overline{FB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} (\because \Delta ABC \sim \Delta BFE)$$

   且

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} (\because \Delta ABC \sim \Delta EFD),$$

整理可得

$$\begin{cases}\overline{AB}\cdot\overline{FB}=\overline{BC}\cdot\overline{BE}\ldots(1)\\ \overline{AB}\cdot\overline{FD}=\overline{AC}\cdot\overline{DE}\ldots(2),\end{cases}$$

然後將(1)式+(2)式可得

$$\overline{AB}\cdot(\overline{FB}+\overline{FD})=\overline{BC}\cdot\overline{BE}+\overline{AC}\cdot\overline{DE}$$

$$\Rightarrow\overline{AB}\cdot\overline{DB}=\overline{BC}\cdot\overline{BE}+\overline{AC}\cdot\overline{DE},$$

也就是若兩個直角三角形為相似形，對應的斜邊乘積會等於對應的邊長乘積和。我們可以將它寫成：

$c\cdot c'=a\cdot a'+b\cdot b'$ (其中 a,b,c 及 a',b',c' 分別表示相似三角形的邊長).

4. 最後若考慮 $\Delta ABC\sim\Delta ABC$ 也就是取 $a=a',b=b',c=c'$, 而上述關係式也就可以變成

$$c^2=a^2+b^2,$$

即為畢氏定理關係式。

【註與心得】

1. 來源：此證明來自網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #13.
2. 心得：這個證明可以說是更一般化的畢氏定理，可以使用在兩個相似的直角三角形中。至於一個直角三角形的畢氏定理我們可以利用「極限」的概念或是「兩個全等的三角形」的概念來詮釋，而在教學上就可以利用這個機會讓學生思考這些想法。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●			●	●

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：
   S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。
   此證明正是利用三角形的相似來推理出畢氏定理關係式。