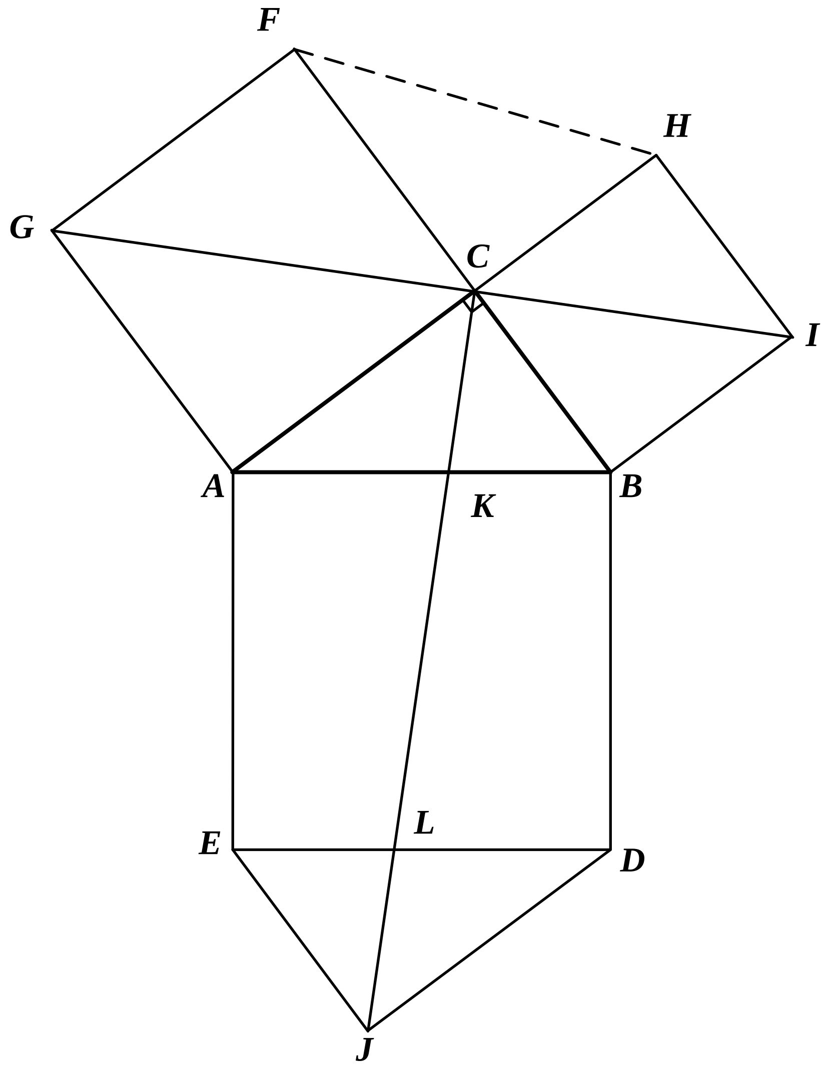
勾股定理證明-Bog016

【作輔助圖】

1. 分別以直角三角形 ABC 的三邊為邊，向外作正方形 $ABDE$ 、正方形 $ACFG$ 以及正方形 $BCHI$ 。
2. 然後連接 $\overline{GC}$ 且連接 $\overline{GI}$ 。這裡不難發現 $G-C-I$ 三點共線。($\because$ 對頂角相等=45°)
3. 接著過 E 作 $\overline{CB}$ 的平行線，並過 D 作 $\overline{CA}$ 的平行線，相交於 J 。
4. 最後連 $\overline{CJ}$ ，與 $\overline{AB}$ 及 $\overline{DE}$ 分別交於 K 及 L 。



【求證過程】

我們先證明輔助圖中上下兩個直角三角形全等，然後證明另一組四個四邊形全等，再透過面積的算式推導即可得到畢氏定理關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta DEJ$ 為全等三角形，以下我們給個證明：

   因為

$$\overline{AB} = \overline{DE} (\because \text{正方形的邊}),$$

   而且

$$\angle BAC = \angle EDJ (\because \overline{AC} // \overline{DJ}, \text{且} \overline{BC} // \overline{EJ}),$$

以及

$$\angle ABC=\angle DEJ\,(\because \overline{AC}\,//\,\overline{DJ},\text{且}\,\overline{BC}\,//\,\overline{EJ}),$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta DEJ\ (\text{ASA 全等}).$$

2. 接著也可以看出四邊形 $CAEJ$,四邊形 $GABI$ 的全等，以及四邊形 $JDBC$,四邊形 $GABI$ 的全等，而四邊形 $CAEJ$,四邊形 $GABI$ 全等，以下給出它們的證明：
   因為
   $$\overline{CA}=\overline{GA},\text{並且}\ \overline{AE}=\overline{AB},\text{以及}\ \overline{EJ}=\overline{BI}\ (\because \text{正方形的邊}),$$
   又有
   $$\angle CAE=90^\circ+\angle CAB=\angle GAB,$$
   加上
   $$\begin{aligned}\angle AEJ&=90^\circ+\angle DEJ\\&=90^\circ+\angle CBA(\because \Delta ABC\cong\Delta DEJ)\\&=\angle ABI,\end{aligned}$$
   所以就可以得證
   $$\text{四邊形}CAEJ\cong\text{四邊形}GABI\ \ (\text{SASAS 全等}).$$
   接著同理可以證明四邊形$JDBC\cong$四邊形$GABI$.
3. 不難發現另一組四邊形 $GFHI$,四邊形 $GABI$ 也是全等圖形，是因為
   $$\overline{GF}=\overline{GA},\text{並且}\ \overline{HI}=\overline{BI}\,(\because \text{正方形的邊}),\ \text{以及}\ \overline{GI}=\overline{GI}\,(\because \text{共用邊}),$$
   又有
   $$\angle IGF=\angle GIH=45^\circ=\angle GIB=\angle IGA,$$
   所以可以得證
   $$\text{四邊形}GFHI\cong\text{四邊形}GABI\ (\text{SASAS 全等}).$$
4. 最後推導面積的關係式就可以得到：
   $$\begin{aligned}\square ABDE&=ACJE+BCJD-\Delta ABC-\Delta DEJ\\&=AGIB+HIGF-\Delta ABC-\Delta CHF\\&=\square ACFG+\square BCHI,\end{aligned}$$
   此即為畢氏定理關係式
   $$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是知名的文藝復興時期人物達文西(Leonardo da Vinci)所給出，記載於網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #16。
2. 心得：這是個相當著名的畢氏定理證明，由文藝復興時期的達文西留下。在教學上我們可以透過名人對數學的探索故事，來引導學生增進對數學的興趣。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學

●		●	●	●

4.　補充：達文西，十五世紀義大利文藝復興時期的代表人物、博學者，他在繪畫、音樂、建築、數學、解剖、生理、動物、植物、天文、氣象、地質、物理、土木、設計等領域都有知名的成就。特別地，他在藝術創作中融入幾何學的，早了現代設計師幾百年的時間。

而在數學能力指標中，有這麼一項：

C-R-04：能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。

或許達文西在這裡所給出的勾股定理證明方法並不是特別地令人驚嘆，但這是一個介紹達文西與數學的好機會，一位被現代世人認為在藝術方面有重大成就的藝術家，他並不將數學拒於千里之外，而是擁抱它，並且嘗試將它們完美地結合。這可能正是他的藝術創作不朽的原因之一。