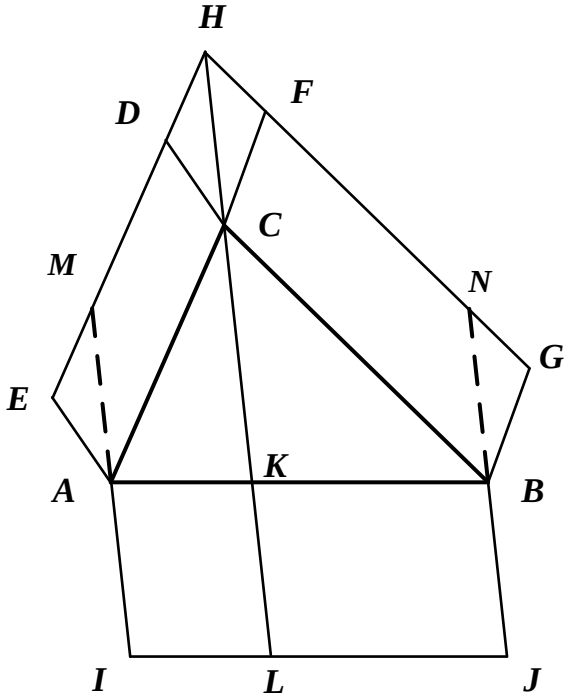
勾股定理證明-Bog017

【作輔助圖】

1. 以任意三角形 ABC 的 $\overline{AC},\overline{BC}$ 為平行四邊形的一邊，分別向外作平行四邊形 $ACDE$ 及平行四邊形 $BCFG$ 。並延伸 $\overline{ED},\overline{GF}$ 交於 H 。
2. 連 $\overline{HC}$ ；然後過 A,B 向外作與 $\overline{HC}$ 平行且等長的線段 $\overline{AI}$ 及 $\overline{BJ}$ ，連成平行四邊形 $BAIJ$ 。再延伸 $\overline{HC}$ 分別與 $\overline{AB}$ 及 $\overline{IJ}$ 交於 K,L 。
3. 最後延伸 $\overline{IA}$ 及 $\overline{JB}$ ，分別與 $\overline{ED}$ 及 $\overline{GF}$ 交於 M,N 。



【求證過程】

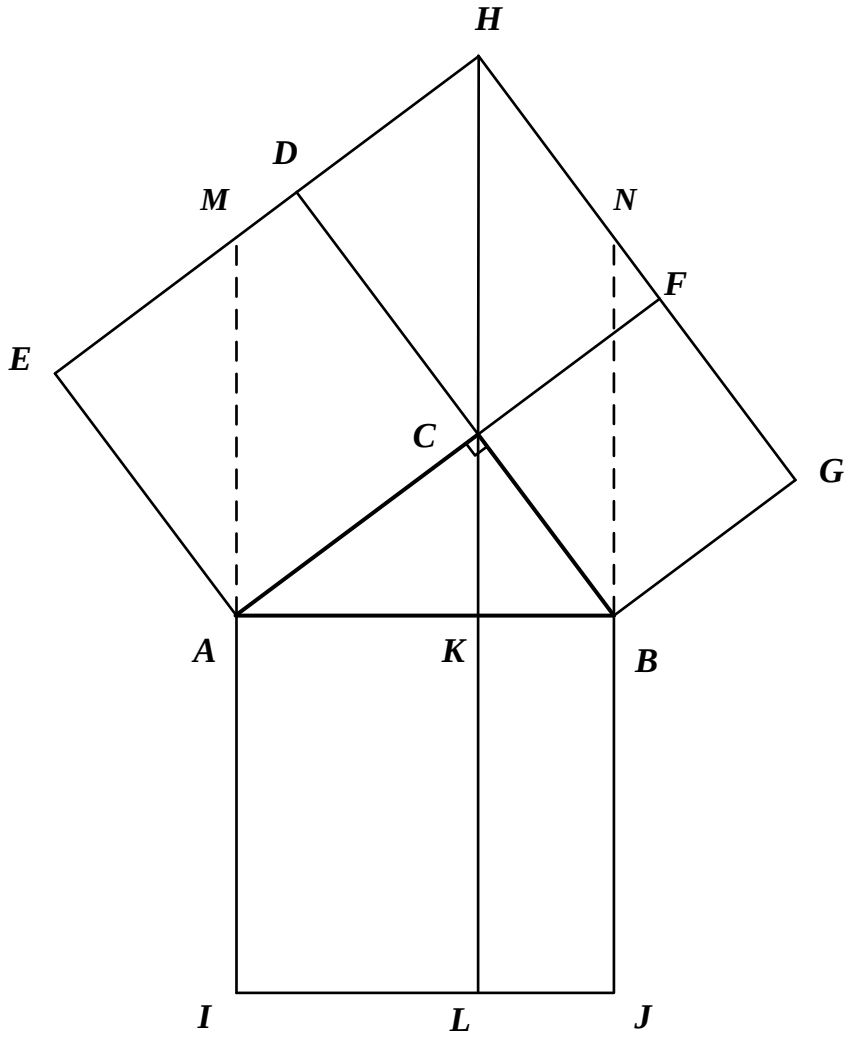
這個證明不只是在證明畢氏定理，而是更廣義的狀況：任意三角形二邊上任意作平行四邊形，只要再以上述方式作第三邊上的平行四邊形，則兩個平行四邊形的面積和必等於第三個平行四邊形面積。我們使用推移的方式來證明，先將大平行四邊形分成兩塊，其中每一塊分別可以推移兩次後得到小的平行四邊形。也就證明了這個定理。而如果我們一開始將三角形設定為直角三角形，用完全一樣的方式即可證明畢氏定理。

1. 不難發現 $AILK$ 為平行四邊形，因為 $\overline{AI}$ 平行於 $\overline{HC}$ ，並且 $\overline{AB}$ 平行於 $\overline{IJ}$ 。也不難以同理證明 $ACHM$ 亦為平行四邊形，再加上 $\overline{AI}=\overline{HC}$,就可以由平行四邊形 $ACHM$ 與平行於邊形 $AILK$ 同底同高，得知它們的面積相等；再同理得到平行四邊形 $BKLJ$ 的面積等於平行四邊形 $BCHN$ 的面積。
2. 另一方面，平行四邊形 $ACHM$ 與平行四邊形 $ACDE$ 共用 $\overline{AC}$ 邊，顯然為同底高的平行四邊形，因此它們的面積相等。而再承上題的同理得到平行四邊形 $BCHN$ 的面積等於平行四邊形 $BCFG$ 的面積。
3. 最後綜合以上敘述可以分割加上推移得證：

$$\square ABJI = \square AKLI + \square BKLJ$$
$$= \square ACHM + \square BCHN$$
$$= \square ACDE + \square BCFG.$$

這裡稱作證明了廣義的畢氏定理。

4. 若要證明直角三角形的畢氏定理，我們只要將原本的三角形設定為直角的三角形，其中平行四邊形改為正方形即可，如下圖：



可以得到

$$\square ABJI = \square AKLI + \square BKLJ$$
$$= \square ACHM + \square BCHN$$
$$= \square ACDE + \square BCFG,$$

這也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是西元 300 年的 Pappus 所寫下，被收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #17。

2. 心得：這個證明使用到同底同高的平行四邊形面積相等的推移證法，並且可以以動態的方式呈現。除了直角三角形的狀況外更是一般化地證了所有三角形的狀況，可以說是結合了美學與教學的經典範例。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	●

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：

C-E-03：能經闡釋及審視情境，重新評估原來的轉化是否得宜，並做必要的調整。

根據這個指標所敘述，我認為這是一個很好的機會幫助學生達成這項能力。首先是由於它是由一般三角形及平行四邊形的一般化狀況而進而得到直角三角形及正方形的特例，也就得到了勾股定理的證明。

而另一方面，當我們看完這個靜態的文本證明過程之後，只要留下一個問題，這個過程有沒有更好的呈現方式？自然地學生開始重新評估，再經過適當的引導，就可以以動態方式呈現推移面積的證明思路，這也是記得這個證明過程的最佳方式。