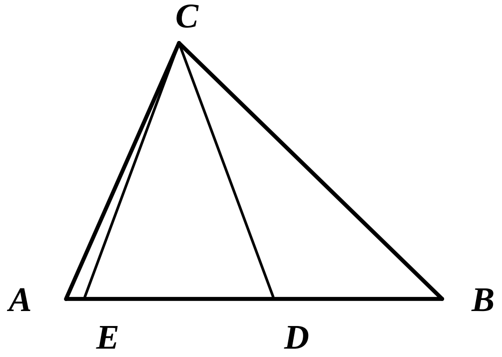
勾股定理證明-Bog018

【作輔助圖】

1. 任意三角形 ABC ，於 $\overline{AB}$ 邊上取一點 D 使得 $\angle ADC = \angle ACB$ ；另外在 $\overline{AB}$ 邊上取一點 E 使得 $\angle BEC = \angle ACB$ 。



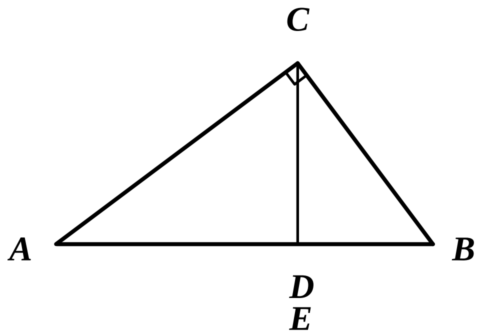
【求證過程】

先作任意三角形，在長邊上取共角使得到兩個相似的三角形。接著我們可以透過相似形的邊長成比例的特性，輕易地得到廣義畢氏定理關係式。若要證明畢氏定理關係式，只要將一開始的三角形設定為直角三角形即可完成。

1. 我們可以看出 $\Delta ABC, \Delta ACD, \Delta CBE$ 為相似三角形，以下是它們的證明：
   其中 $\Delta ABC, \Delta ACD$, 因為有
   $$\angle CAB = \angle DAC \text{ (共角)},$$
   並且有
   $$\angle ACB = \angle ADC,$$
   所以
   $$\Delta ABC \sim \Delta ACD \text{ (AA 相似)}.$$
   另外我們看 $\Delta ABC, \Delta CBE$, 因為有
   $$\angle CBA = \angle EBC \text{ (共角)},$$
   並且有
   $$\angle BCA = \angle BEC,$$
   所以可以推得
   $$\Delta ABC \sim \Delta CBE \text{ (AA 相似)}.$$
2. 我們將 ΔABC 的三邊分別以 $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b, \overline{AB} = c$ 方便計算,
   其中因為 $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, 所以有
   $$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}},$$
   可以推得
   $$\overline{AC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{AB}.$$
   同理因為 $\Delta ABC \sim \Delta CBE$, 所以可以推得
   $$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BE}.$$
3. 綜合以上可得
   $$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB} \times (\overline{AD} + \overline{BE}).$$

這就是廣義的畢氏定理，可以用於任意三角形。

4. 若是我們想使用來證明畢氏定理，只要將一開始的三角形設定為直角三角形且 $\angle ACB$ 為直角即可。如下圖所示：



其中 D, E 為 C 對 $\overline{AB}$ 作垂直線的唯一垂足，再透過剛剛的廣義定理可以得到

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2+\overline{BC}^2 &= \overline{AB}\times(\overline{AD}+\overline{BE})\\ &= \overline{AB}\times(\overline{AD}+\overline{BD})\\ &= \overline{AB}\times\overline{AB}\\ &= \overline{AB}^2,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$a^2+b^2=c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：這是阿拉伯泰比特·伊本·奎拉 (Thabit ibn Qurra, 826-901)的證明，收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #18
2. 心得：這個證明方式用到了較特殊的手法，作了共角製造相似的三角形，並且由廣入狹地證明了畢氏定理。這樣的手法就像是經典的托勒密定理也是由作共角及相似形開始的，可以提供學生學習這類證明技巧的重要範例。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：

S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

此證明正是利用相似三角形來推理出畢氏定理關係式。