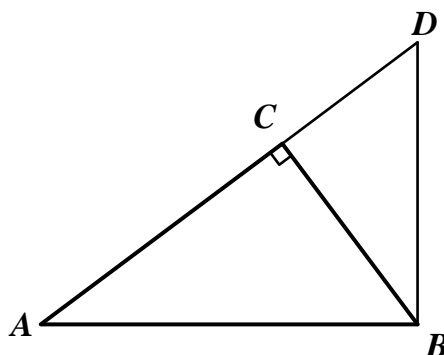


勾股定理證明-Bog019

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC 中，延長 \overline{AC} 並過 B 作 \overline{AB} 的垂直線，兩線相交於 D 。



【求證過程】

先證明 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADB$ 及 $\triangle BDC$ 為相似三角形，再利用兩個小三角形的面積和為大三角形面積，以及相似形的邊形成比例的特性，即可證明畢氏定理的關係式。

1. 不難看出 $\triangle ABC$ 及 $\triangle ADB$ 為相似的三角形，以下我們給出證明：

因為 $\angle CAB = \angle BAD$ 且 $\angle ACB = 90^\circ = \angle ABD$ ，所以可以得到

$\triangle ABC$ 相似於 $\triangle ADB$ (AA 相似).

2. 也可以看出 $\triangle ABC$ 相似於 $\triangle BDC$ ，同樣地我們給個證明：

因為 $\angle CAB = \angle CBD$ 且 $\angle ACB = 90^\circ = \angle BCD$ ，所以可以得到

$\triangle ABC$ 相似於 $\triangle BDC$ (AA 相似).

3. 利用相似形的特性來得到邊長的關係式：

因為 $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ ，所以 $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ ，可以推得 $\overline{CD} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}$ 。

4. 也可以得到另一組邊長關係式：

因為 $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ ，所以 $\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$ ，可以推得 $\overline{BD} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{\overline{AC}}$ 。

5. 因為 $\triangle ABD = \triangle ABC + \triangle BDC$ ，可以得到

$$\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{CD} \cdot \overline{CB}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{BD} = \overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{CD} \cdot \overline{CB} \text{ (等號左右式同乘2)}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \cdot \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BA}}{\overline{AC}} = \overline{AC} \cdot \overline{BC} + \frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}} \cdot \overline{BC} \text{ (將推論的結果帶入)}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \text{ (等號左右式同乘 } \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \text{)}$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #19.

2. 心得：用簡單的輔助線搭配相似形的邊長特性來證明，沒有複雜的面積拆解及面積相等的證明過程。是同時用到基本的幾何特性及基本的代數技巧的好證明。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。

以及

A-4-05：能理解等量公理的意義，並做應用。

此證明正是利用三角形的相似再搭配等量公理來推理出畢氏定理關係式。