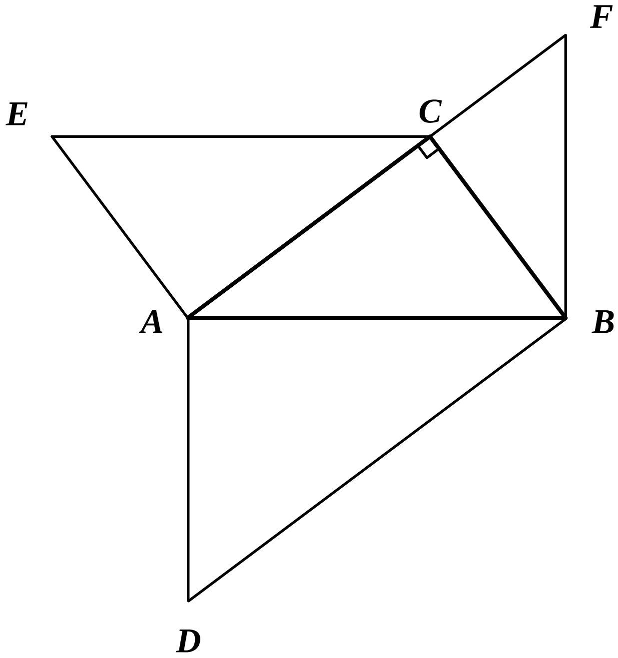
勾股定理證明-Bog020

【作輔助圖】

1. 直角三角形 ABC 中，作 $\overline{AC}$ 的延伸線並過 B 作 $\overline{AB}$ 的垂直線，兩線相交於 F 。
2. 接著過 A 向外作 $\overline{AB}$ 的垂直線，並取一點 D 使得 $\overline{AD}=\overline{BF}$ ，連 $\overline{BD}$ 。
3. 最後過 A 向外作 $\overline{AC}$ 的垂直線，並取一點 E 使得 $\overline{AE}=\overline{BC}$ ，連 $\overline{CE}$ 。



【求證過程】

先以直角三角形的三邊為邊為中邊，向外作相似於原直角三角形的直角三角形。可以以全等方式證明最大的直角三角形恰好為兩個小直角三角形的面積之和。再透過相似形邊長成比例的性質，並利用到等量乘法原理的代數操作，即可證明畢氏定理關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta CEA$ 為全等的三角形，以下我們給出證明：

   因為
$$\overline{AC}=\overline{CA}(\text{共用邊}),$$
   並且
$$\overline{AE}=\overline{CB},$$
   以及
$$\angle ACB=90^\circ=\angle CAE,$$
   所以
$$\Delta ABC\cong\Delta CEA(\text{SAS 全等}).$$
2. 接著也可以看出 $\Delta AFB, \Delta BDA$ 為全等三角形，以下是它的證明：

   因為
$$\overline{AB}=\overline{BA}(\text{共用邊}),$$
   並且
$$\overline{AD}=\overline{BF},$$

以及

$$\angle ABF = 90^\circ = \angle BAD,$$

所以

$$\Delta AFB \cong \Delta BDA(\text{SAS 全等}).$$

3. 再來我們看 $\Delta ABC, \Delta BFC, \Delta CEA, \Delta BDA$ 這四個三角形為相似三角形，以下給出它們的證明：

   其中 $\Delta ABC, \Delta BFC$ 是因為

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle BCF \text{ 並且 } \angle CAB = 90^\circ - \angle CBA = \angle CBF,$$

   所以

$$\Delta ABC \sim \Delta BFC \text{ (AA 相似)}.$$

   再來看 $\Delta ABC, \Delta BDA$, 因為

$$\angle BAD = 90^\circ = \angle ACB,$$

   並且

$$\begin{aligned}\angle ABD &= \angle FAB (\because \Delta BDA \cong \Delta FAB)\\ &= \angle CAB,\end{aligned}$$

   所以

$$\Delta ABC \sim \Delta BDA \text{(AA 相似)}.$$

   又我們知道 $\Delta ABC \cong \Delta CEA$, 因此可以得到

$$\Delta ABC \cong \Delta CEA \sim \Delta BFC \sim \Delta BDA.$$

4. 綜合以上我們推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\Delta BDA &= \Delta AFB\\ &= \Delta ABC + \Delta BFC\\ &= \Delta CEA + \Delta BFC,\end{aligned}$$

   也就是

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{AE} + \overline{BC} \cdot \overline{CF},$$

   因為相似形的邊長成比例，所以可以得到

$$\overline{AB} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \overline{BC},$$

   透過等量乘法原理就可以得到畢氏定理關係式

$$\overline{AB} \cdot \overline{AB} = \overline{AC} \cdot \overline{AC} + \overline{BC} \cdot \overline{BC}.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #20.
2. 心得：此證明的輔助圖形簡單，利用到相似形及面積拆解，在教學上正好能讓國中學生練習中學生應有的邊長比例性質及等量原理的技巧。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-15：能理解三角形和多邊形的相似性質，並應用於解題和推理。以及
A-4-05：能理解等量公理的意義，並做應用。
此證明正是利用三角形的相似再搭配等量公理來推理出畢氏定理關係式。