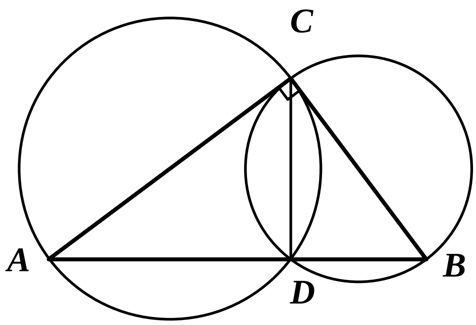
勾股定理證明-Bog022

【作輔助圖】

1. 過直角三角形 ABC 的 C 點作 $\overline{AB}$ 的高，垂足 D。
2. 以 $\overline{AC}$ 為直徑作圓 Γ_1，並以 $\overline{BC}$ 為直徑作圓 Γ_2。



【求證過程】

作直角三角形斜邊上的高，並以直角三角形的兩股為直徑作圓，利用圓的切割線定理，再將兩個切線段平方加起來，即可透過簡單的代數運算性質得證畢氏定理關係式。

1. 其中 $\overline{AC}$ 為直徑，且 $\angle ADC = 90^\circ$，因此 D 落在圓 Γ_1 上。同理因為 $\overline{BC}$ 為直徑，且 $\angle BDC = 90^\circ$，因此 D 落在圓 Γ_2 上。
2. 因為 $\angle ACB = 90^\circ$ 且 $\overline{AC}$ 為圓 Γ_1 的直徑，所以 $\overline{CB}$ 為切線段。可以根據切割線定理, 得到
$$\overline{BC}^2 = \overline{BD} \times \overline{BA}.$$
3. 同理因為 $\angle BCA = 90^\circ$ 且 $\overline{BC}$ 為圓 Γ_2 的直徑，所以 $\overline{CA}$ 為切線段。可以根據切割線定理, 得到
$$\overline{CA}^2 = \overline{AD} \times \overline{AB}.$$
4. 綜合以上可得,
$$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BD} \times \overline{BA} + \overline{AD} \times \overline{AB} = \overline{AB} \times (\overline{BD} + \overline{DA}) = \overline{AB}^2,$$
此即為畢氏定理關係式
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明由 B. F. Yanney 及 J. A. Calderhead 發表在《*Am Math Monthly*》一書中的第 24 頁。並收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #22。
2. 心得：這個證明特別之處就是在於它使用到了圓及切割線定理，事實上它就等同是使用到了子母相似直角三角形的關係式，但若是加上兩個圓形當作輔助，將可以更清楚地顯示出畢氏定理與相似三角形的關係證法。我想這在教學上將是個重要的啟發，我們經常在講使用更高的視角去看待一些問題，不論是記憶上或理解上將都會有所突破。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標當中，有這麼一項：
S-4-17 能理解圓的幾何性質。
而切割線定理就是圓的切線與割線的幾何性質，這也是補充切割線定理的好機會。