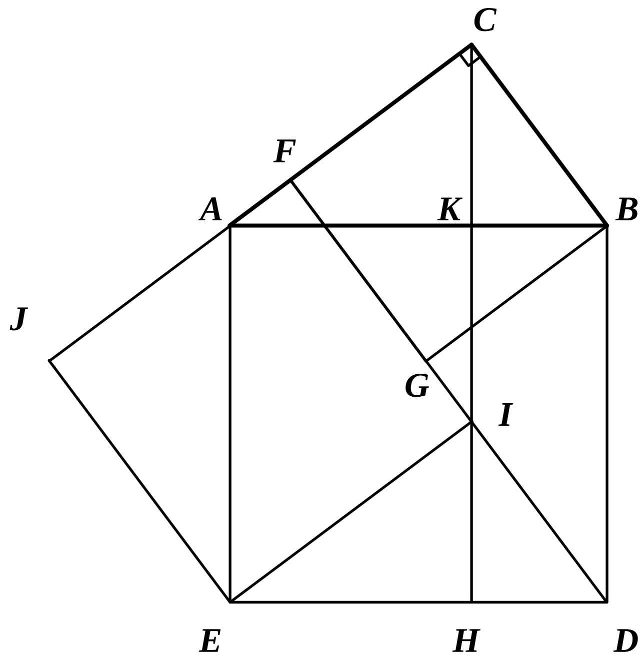
勾股定理證明-Bog025

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $ABDE$ ；另外以 $\overline{BC}$ 為正方形的一邊，向內作正方形 $BCFG$ 。並且連 $\overline{GD}$ 。
2. 接著過 C 對 $\overline{DE}$ 作垂直線，垂足 H 。過 E 對 $\overline{GD}$ 作垂直線，垂足 I 。
3. 最後以 $\overline{EI}$ 為正方形的一邊，向上作正方形 $IEJF'$ 。以下我們將證明 F' 與 F 會是同一點。 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CH}$ 的交點為 K 。



【求證過程】

先以輔助線分別製作以直角三角形三邊長之一為邊的正方形，並將大正方形以輔助線切成兩個長方形。接著我們利用推移的方式將兩個長方形都推成長方形後，再將兩個長方形都移成兩個小正方形。因為我們知道推移後的面積不變，也就可以利用面積的等式來證明畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta DBG, \Delta EDI, \Delta EAJ$ 為全等的直角三角形，以下我們給個證明：
   首先看 $\Delta ABC, \Delta DBG,$
   因為
   $$\overline{AB} = \overline{DB}(\because \text{正方形的邊}),$$
   並且
   $$\overline{BC} = \overline{BG}(\because \text{正方形的邊}),$$
   以及
   $$\angle CBA = 90^\circ - \angle ABG = \angle GBD,$$
   所以
   $$\Delta ABC \cong \Delta DBG\,(\text{SAS 全等}).$$
   也因此有 $\angle BGD = 90^\circ = \angle BGF$, 推得 $B-G-F$ 三點共線.

繼續看$\Delta ABC, \Delta EDI$，是因為

$$\overline{AB} = \overline{ED} (\because \text{ 正方形的邊}),$$

並且

$$\begin{aligned} \angle CBA &= 90^\circ - \angle CAB \\ &= 90^\circ - \angle GDB (\because \Delta ABC \cong \Delta DBG), \end{aligned}$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle EID,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EDI \text{ (AAS 全等)}.$$

接著看$\Delta ABC, \Delta EAJ$，

因為

$$\overline{AB} = \overline{EA} (\because \text{ 正方形的邊}),$$

並且

$$\begin{aligned} \angle CAB &= \angle IED (\because \Delta ABC \cong \Delta EDI) \\ &= 90^\circ - \angle AEI \\ &= \angle AEJ, \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{EI} (\because \Delta ABC \cong \Delta EDI) \\ &= \overline{EJ} (\because \text{ 正方形的邊}), \end{aligned}$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EDJ \text{ (SAS 全等)}.$$

因此

$$\angle EJA = 90^\circ = \angle EJF',$$

可以推得

$$J - A - F' \text{ 三點共線}.$$

又因為

$$\angle JAE + \angle EAB + \angle BAC = 180^\circ,$$

所以

$$J - A - C \text{ 三點共線}.$$

又因為$\angle EIF = 90^\circ = \angle EIF'$,並且$I, F, F'$三點共線，以及

$$\begin{aligned}\overline{IF} &= \overline{DF} - \overline{DI} \\ &= \overline{DF} - \overline{BC} (\because \Delta ABC \cong \Delta EDI) \\ &= \overline{DF} - \overline{GF} (\because \text{正方形的邊}) \\ &= \overline{DG} \\ &= \overline{IE} (\because \Delta EDI \cong \Delta DBG) \\ &= \overline{IF'} (\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

所以

$$F = F'.$$

2. 我們可以發現四邊形 $BDHK$ 為長方形, $BDIC$ 為平行四邊形, 而 $BCFG$ 為正方形。另一方面四邊形 $AEHK$ 為長方形, $AEIC$ 為平行四邊形, 而 $EIFJ$ 為正方形。
3. 綜合以上就可以推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \square BDHK + \square AEHK \\ &= \square BDIC + \square AEIC \\ &= \square \text{正方形} BCFG + \square EIFJ,\end{aligned}$$

也就是畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明是 B. F. Yanney 給出，收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #25。
2. 心得：推移指的是一種變換，而在此變換下的圖形的面積不變。這個證明是少數用到推移的概念的面積證法。如果以更貼近國中生的概念是同底等高的平行四邊形的面積相等，在教學上可以透過這個畢氏定理的證明來讓學生更熟悉這個技巧的使用。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

   以及

   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。