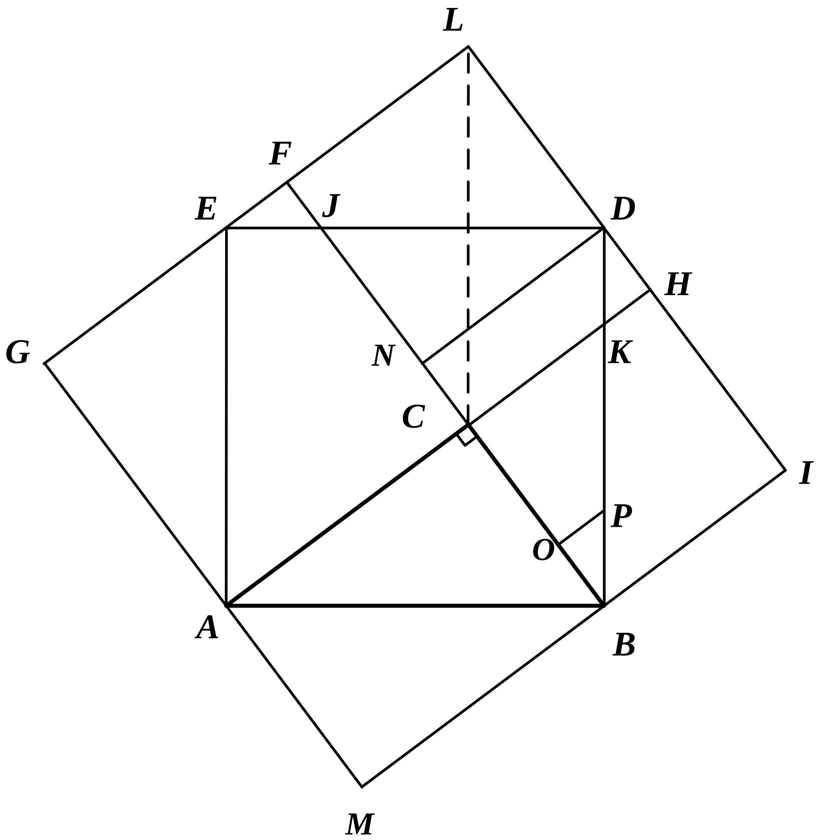
勾股定理證明-Bog026

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB},\overline{AC},\overline{BC}$ 邊為正方形的一邊，分別向內、向外、向外作正方形 $ABDE$ 、 $ACFG$ 、 $BCHI$ 。其中 $\overline{CF}$ 與 $\overline{DE}$ 交於 J ，另外 $\overline{CH}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 K 。(在作圖時將會發現 $G-E-F$ 及 $I-H-D$ 共線，我們在以下說明。)
2. 延伸 $\overline{BF},\overline{IH}$ 交於 L ；延伸 $\overline{GA},\overline{IB}$ 交於 M 。
3. 過 D 對 $\overline{BF}$ 作垂直線，垂足 N 。
4. 最後在 $\overline{BD}$ 上取一點 P 使得 $\overline{BP}$ 與 $\overline{EJ}$ 等長，再過 P 對 $\overline{BC}$ 作垂直線，垂足 O 。



【求證過程】

先以輔助線在直角三角形 ABC 的三邊上作正方形並延伸，接著適當地切割大正方形成五塊。在證明過這五塊圖形與兩個小正方形內的五塊圖形對應全等後，就可以以拼圖的方式證明它們的面積關係式，也就證明了畢氏定理。

1. 不難發現 $\Delta ABC,\Delta AEG,\Delta DBI,\Delta EDL$ 為全等的三角形，以下我們給出它們的證明：其中考慮 $\Delta ABC,\Delta DBI$,

因為

$$\overline{AB}=\overline{BD}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{BC}=\overline{BI}(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle CBA=90^\circ-\angle CBD=\angle DBI,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta DBI \text{ (SAS 全等)}.$$

接著看$\Delta ABC, \Delta AEG$,

因為

$$\overline{AB} = \overline{AE}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{AC} = \overline{AG}(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle CAB = 90^\circ - \angle EAC = \angle EAG,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta AEG \text{ (SAS 全等)}.$$

在這裡我們可以發現$\angle AGE = 90^\circ = \angle AGF$, 因此$G - E - F$三點共線. 同理地 $I - H - D$也共線.

再來我們考慮$\Delta ABC, \Delta CLF$,

因為

$$\overline{AC} = \overline{CF}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{CH}(\because \text{正方形的邊}) \\ &= \overline{FL}\ (\because \text{長方形的邊}),\end{aligned}$$

以及

$$\angle ACB = 90^\circ = \angle CFL,$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta CLF \text{ (SAS 全等)}.$$

換成考慮$\Delta ABC, \Delta EDL$, 其中因為

$$\begin{aligned}\angle CAB &= \angle IDB(\because \Delta ABC \cong \Delta DBI) \\ &= 90^\circ - \angle LDE \\ &= \angle LED,\end{aligned}$$

並且

$$\begin{aligned}\angle CBA &= \angle AEG(\because \Delta ABC \cong \Delta AEG) \\ &= 90^\circ - \angle LED \\ &= \angle LDE,\end{aligned}$$

以及

$$\overline{AB} = \overline{DE}(\because \text{正方形的邊}),$$

所以

$$\Delta ABC \cong \Delta EDL \text{ (ASA 全等)}.$$

2. 接著也可以發現$\Delta BPO, \Delta EJF$為全等的三角形，以下給個證明：

因為

$$\overline{BP}=\overline{EJ},$$

並且

$$\angle BOP=90^\circ=\angle EFJ,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle PBO&=90^\circ-\angle CBA\\&=90^\circ-\angle GEA(\because \Delta ABC\cong\Delta AEG)\\&=\angle JEF,\end{aligned}$$

所以

$$\Delta BPO\cong\Delta EJF\ (\text{AAS 全等}).$$

3. 而 $\Delta DJN,\Delta BKC$ 亦為全等的三角形，以下是它的證明：
因為四邊形 $CNDH$ 的四個角均為直角，所以四邊形 $CNDH$ 為長方形。
因此我們有

$$\begin{aligned}\overline{DN}&=\overline{HC}(\because \text{長方形的邊})\\&=\overline{CB}\ (\because \text{正方形的邊}),\end{aligned}$$

並且

$$\angle DNJ=90^\circ=\angle BCK,$$

以及

$$\begin{aligned}\angle DJN&=\angle FJE\ (\because \text{對頂角相等})\\&=\angle OPB(\because \Delta EJF\cong\Delta BPO)\\&=90^\circ-\angle PBO\\&=\angle CKB,\end{aligned}$$

所以可以得到

$$\Delta DJN\cong\Delta BKC\ (\text{AAS 全等}).$$

4. 另外梯形 $POND$,梯形 $KHIB$ 為全等的四邊形，我們利用五個條件證明四邊形的全等：
因為有

$$\overline{DN}=\overline{IB}(\because \text{長方形}BIDN\text{的對邊}),$$

並且

$$\begin{aligned}\overline{NO}&=\overline{NB}-\overline{OB}\\&=\overline{DI}-\overline{EF}(\because \square BNDI\text{及}\Delta EJF\cong\Delta BPO)\\&=\overline{EL}-\overline{EF}(\because \Delta DBI\cong\Delta EDL)\\&=\overline{FL}\\&=\overline{BI}(\because \square BFLI\text{的對邊})\\&=\overline{IH}(\because \text{正方形的兩邊}),\end{aligned}$$

以及

$$\angle NDP = 90^\circ - \angle JND$$
$$= 90^\circ - \angle KBC (\because \Delta DJN \cong \Delta BKC)$$
$$= \angle KBI,$$

加上

$$\angle DNO = \angle NOP = 90^\circ = \angle BIH = \angle KHI,$$

所以可以推得

$$\text{四邊形} POND \cong \text{四邊形} KHIB (\text{ASASA 全等}).$$

5. 透過上面的全等證明，現在就可以推導面積關係式：
   以拼圖方式證明如下

$$\square ABDE = \Delta ABC + ACJE + \Delta DJN + POND + \Delta BPO$$
$$= \Delta AEG + ACJE + \Delta BKC + KHIB + \Delta EJF$$
$$= (\Delta AEG + ACJE + \Delta EJF) + (\Delta BKC + KHIB)$$
$$= \square ACFG + \square BCHI,$$

   此即為畢氏定理關係式

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明來自網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #26.
2. 心得：若不去檢查每組拼片的全等性，這個證明事實上不難理解。在教學上若我們是提供拼片給學生拼湊的話，雖然嚴謹程度是不足的，但對於學生的理解是會有幫助的。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：
   S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。
   以及
   N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。
   此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。