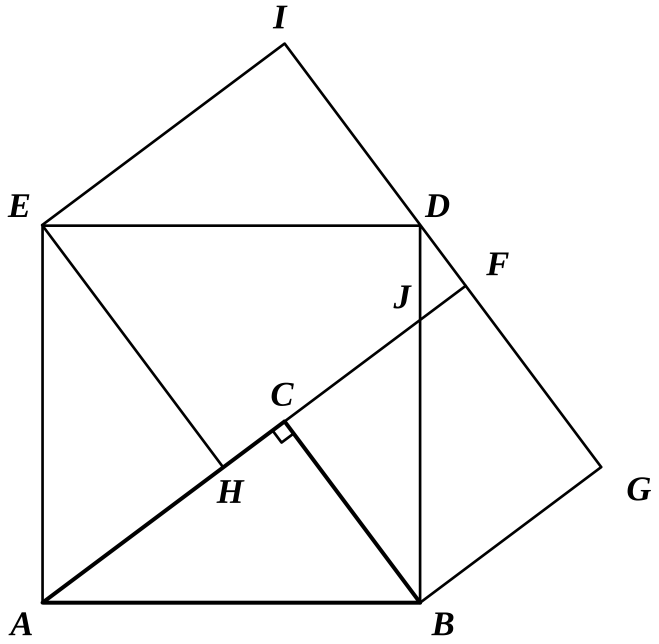
勾股定理證明-Bog027

【作輔助圖】

1. 以直角三角形 ABC 的 $\overline{AB}$ 邊為正方形的一邊，向內作正方形 $ABDE$ ；再以 $\overline{BC}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $BDFG$ 。其中 $\overline{BD}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 J 。
2. 過 E 作 $\overline{AC}$ 的垂直線，垂足為 H 。
3. 以 $\overline{EH}$ 為正方形的一邊，向外作正方形 $HEIF'$ 。其中 F' 將與 F 共點，將在以下說明。



【求證過程】

先以適當的輔助線各別得到以直角三角形的邊為一邊的三個正方形，其中大正方形有部分與兩個小正方形重疊，而剩下來的部分為兩個對應全等的直角三角形，可以直接以拼圖的方式補滿兩個小正方形留下的空。可以透過這樣的想法來證明大正方形面積等於兩個小正方形面積的和，也就可以得到畢氏定理的關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta EDI, \Delta EAH, \Delta DBG$ 為全等的直角三角形，以下我們給出證明：
   其中 $\Delta ABC, \Delta EAH$ ：
   因為
   $$\overline{AB} = \overline{EA} (\because \text{正方形的邊}),$$
   並且
   $$\angle EHA = 90^\circ = \angle ACB,$$
   以及
   $$\angle EAH = 90^\circ - \angle CAB = \angle CBA,$$
   所以
   $$\Delta ABC \cong \Delta EAH \text{ (AAS 全等)}.$$
   再看 $\Delta EDI, \Delta EAH$,
   因為

$$\overline{ED}=\overline{EA}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{EH}=\overline{EI}(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle IED=90^\circ-\angle DEH=\angle AEH,$$

所以

$$\Delta EAH\cong\Delta EDI\ (\text{SAS 全等}).$$

由於$\angle EID=90^\circ=\angle EIF'$, $I-D-F'$三點共線。

接著看$\Delta ABC,\Delta DBG$：

因為

$$\overline{AB}=\overline{BG}(\because \text{正方形的邊}),$$

並且

$$\overline{BC}=\overline{EI}(\because \text{正方形的邊}),$$

以及

$$\angle CBA=90^\circ-\angle CBJ=\angle DBG,$$

所以

$$\Delta ABC\cong\Delta DBG\ (\text{SAS 全等}).$$

由於$\angle BGD=90^\circ=\angle BGF$, $G-F-D$ 三點共線.

綜合以上我們證明了

$$\Delta ABC\cong\Delta EDI\cong\Delta EAH\cong\Delta DBG.$$

2. 而因為有

$$\begin{aligned}\overline{AF}&=\overline{AC}+\overline{CF}\\&=\overline{EH}+\overline{BG}(\because \Delta ABC\cong\Delta EAH\text{以及正方形的邊})\\&=\overline{HF'}+\overline{AH}(\because \text{正方形的邊以及}\Delta DBG\cong\Delta EAH)\\&=\overline{AF'},\end{aligned}$$

所以F,F'為同一點.

3. 最後我們可以推導面積關係式：

$$\begin{aligned}\square ABDE&=\text{四邊形}DEHJ+\Delta EAH+\Delta ABC+\Delta BCJ\\&=(\text{四邊形}DEHJ+\Delta EDI)+(\Delta DBG+\Delta BCJ)\\&=\square EIFH+\square BCFG,\end{aligned}$$

此即為畢氏定理關係式

$$c^2=a^2+b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：此證明由 B. F. Yanney 及 J. A. Calderhead 發表在《*Am Math Monthly*》一書中的第 33 頁。並收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #27.
2. 心得：這個證明由簡單的割補方式得到了面積的等式，是很簡潔的證明。在教學

上過程較不繁雜的證明可以降低學生的負擔，提高學生對證明的接受度。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●	●	●		

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼幾項：

S-4-09：能理解三角形的全等定理，並應用於解題和推理。

以及

N-3-22 及 S-3-06：能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。

此證明正是利用圖形的分割，以及三角形的全等來推理出畢氏定理關係式。