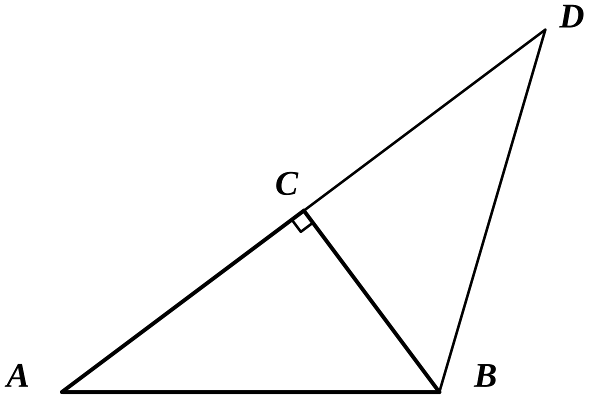
勾股定理證明-Bog075

【作輔助圖】

1. 延伸直角三角形 ABC 的 $\overline{AC}$，並在線上上取一點 D，使得 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AC}$ 等長。連 $\overline{DB}$。



【求證過程】

在直角三角形 ABC 的短邊上製造一個全等的直角三角形，使它擴充成一個等腰三角形。接著我們使用兩種方法計算這個等腰三角形的面積，一是使用海龍公式(Heron's Formula)，另一是使用底乘高除以二。從這兩個面積等式中我們可以透過代數操作整理出畢氏定理關係式。

1. 不難發現 $\Delta ABC, \Delta DBC$ 為全等的直角三角形，以下我們給出證明：
   因為
   $$\overline{AC} = \overline{DC},$$
   並且
   $$\overline{BC} = \overline{BC}\ (\text{共用邊}),$$
   以及
   $$\angle ACB = 90^\circ = \angle DCB,$$
   所以
   $$\Delta ABC \cong \Delta DBC\ \ (\text{SAS 全等}).$$
2. 使用海龍公式(Heron's Formula)計算 ΔADB 面積：
   (為了方便代數計算，我們令 $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b.$)
   $$\begin{aligned}\Delta ABD &= \sqrt{\left(\frac{\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{AD}}{2}\right)\left(\frac{\overline{AB}+\overline{BD}-\overline{AD}}{2}\right)\left(\frac{\overline{AB}-\overline{BD}+\overline{AD}}{2}\right)\left(\frac{-\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{AD}}{2}\right)}\\ &= \sqrt{\left(\frac{c+c+2b}{2}\right)\left(\frac{c+c-2b}{2}\right)\left(\frac{c-c+2b}{2}\right)\left(\frac{-c+c+2b}{2}\right)}\\ &= \sqrt{(c+b)(c-b)(b)(b)}\\ &= b\sqrt{c^2-b^2}.\end{aligned}$$
3. 使用底乘高除以二計算 ΔADB 面積：

$$\Delta ABD=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CB}=\frac{1}{2}\cdot(2b)\cdot(a)=ab.$$

4. 因為海龍公式計算的面積與底乘高除以二的面積必須相等，所以可以得到一個面積等式：

$$\begin{aligned}\Delta_{海}&=b\sqrt{c^2-b^2}=ab=\Delta_{底高}\\&\Rightarrow b^2(c^2-b^2)=a^2b^2\\&\Rightarrow c^2-b^2=a^2\\&\Rightarrow c^2=a^2+b^2.\end{aligned}$$

也就得到了畢氏定理關係式.

【註與心得】

1. 來源：此證明收錄在網站(Cut the Knot)中 Pythagorean Theorem Proof #75。
2. 心得：這個證明使用到了高中課程內正式提及的定理，直接以三邊長得到三角形面積的方式。在高中數學中我們證明這個定理的方式多使用餘弦定理以及使用到正弦的面積公式。也因此如果在高中要利用海龍公式證明畢氏定理，不免有循環論證的問題存在，因為餘弦定理中就可以輕易得到畢氏定理。而三角函數關係中使用到畢氏定理的也不在少數。這個部分在教學上要特別留意，除非我們以一個更純粹的方式證明了海龍公式，而過程沒有使用到任何的畢氏定理，那使用海龍公式來證明畢氏定理的邏輯才不會有問題。
3. 評量：

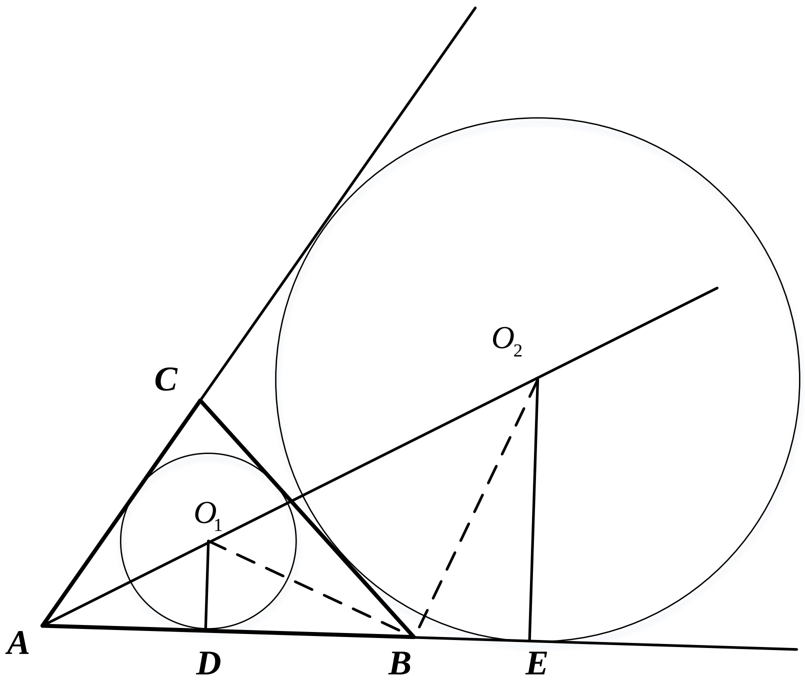
國中	高中	教學	欣賞	美學
	●		●	

4. 補充：在數學能力指標中，有這麼一項：
   A-4-13：能熟練乘法公式。
   在這裡我們先不論海龍面積公式如何被證明，在假設它是正確並可以使用的狀況下，我們可以利用來寫下勾股定理的證明過程，也將這兩個公式之間連上了一些關係。但推論過程當中，要試著將存在三個變數的式子整理成我們關係式，是練習乘法公式的絕佳機會。
   以下補充海龍公式證明，其中不使用到勾股定理，以避免循環論證。

海龍公式證明

【作輔助圖】

1. 任意三角形ABC，延伸$\overline{AB}$及$\overline{AC}$。
2. 並作ΔABC的內切圓O_1，及$\overline{BC}$邊上的旁切圓O_2。其中O_1與$\overline{AB}$切於D，且O_2與$\overline{AB}$延伸線切於E。
3. 連$\overline{O_1B}$以及$\overline{O_2B}$。



【求證過程】

首先將切線段長以三角形ABC的邊長表示，再利用兩組相似三角形，即可以推導出三角形面積與切線段長之間的關係式，也就是海龍定理關係式。

1. 首先我們令$\overline{AB}=c,\ \overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,\ s=\dfrac{a+b+c}{2}$，並且令內切圓$O_1$半徑為$r$，以及旁切圓$O_2$半徑為$R$。接著可以由內切圓、外切圓的性質，得到

$$\overline{AE}=s,$$

且

$$\overline{AD}=s-a,$$

且

$$\overline{BD}=s-b,$$

還有

$$\overline{BE}=s-c.$$

2. 因為$\Delta ADO_1\sim\Delta AEO_2$，所以可以得到$\overline{AD}\big/\overline{O_1D}=\overline{AE}\big/\overline{O_2E}$，也就是

$$\frac{s-a}{r}=\frac{s}{R},$$

可以推得

$$R\left(s-a\right)=rs.$$

3. 又因為$\Delta BDO_1 \sim \Delta O_2EB$, 所以$\overline{BD}\big/\overline{O_1D}=\overline{O_2E}\big/\overline{BE}$, 也就是

$$\frac{s-b}{r}=\frac{R}{s-c},$$

可以推得

$$R=\frac{\left(s-b\right)\left(s-c\right)}{r}.$$

4. 綜合以上可以得到

$$rs=\frac{\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)}{r},$$

再將等式左右同乘rs ，得到

$$\left(rs\right)^2=s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right),$$

又已知$\Delta=rs$,

因此

$$\Delta^2=s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right),$$

即

$$\Delta=\sqrt{s\left(s-a\right)\left(s-b\right)\left(s-c\right)},$$

也就是海龍公式關係式。