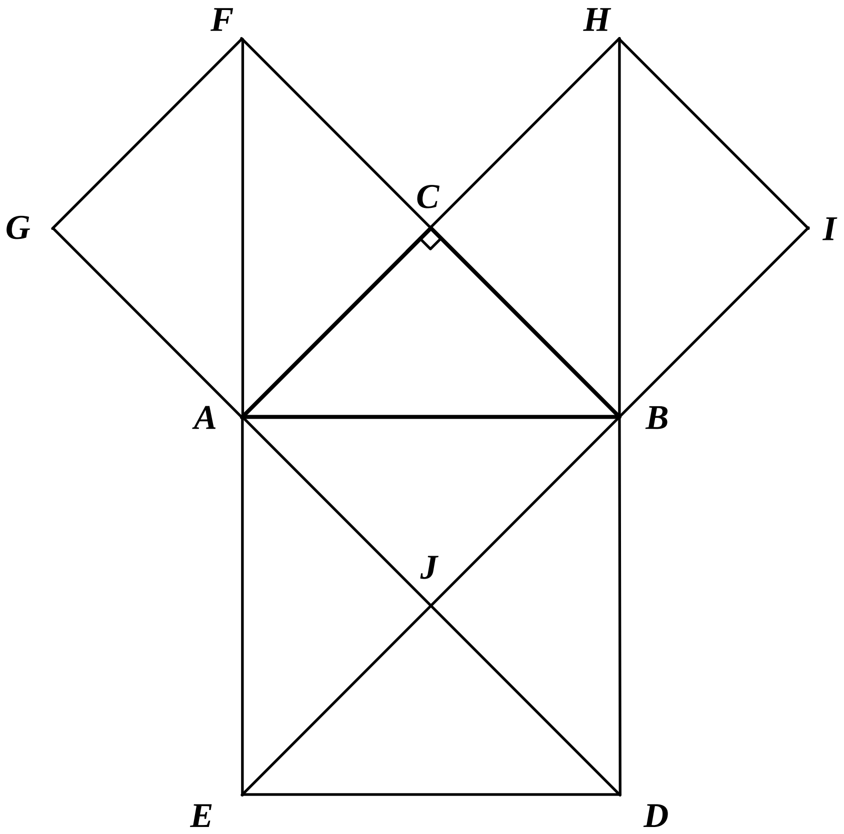
勾股定理證明-A098

【作輔助圖】

1. 等腰直角三角形 ABC 分別以 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 為邊長，向外作正方形 $ABDE$ ，正方形 $ACGF$ 、正方形 $BCHI$ 。
2. 接著連 $\overline{AF}$ 、連 $\overline{BH}$ ；並連 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 J 。



【求證過程】

我們先證明輔助圖中的九個等腰直角三角形皆為全等的等腰直角三角形；再利用面積等式，即可推出畢氏定理的關係式。

1. 不難看出其中五個三角形為全等的三角形，以下我們給個證明：

因為

$$\angle ACF = \angle AGF = \angle BCH = \angle BIF = 90^\circ,$$

並且有

$$\overline{AC} = \overline{CF} = \overline{FG} = \overline{GA} = \overline{BC} = \overline{CH} = \overline{HI} = \overline{IB},$$

所以可以得到

$$\Delta ABC \cong \Delta AFC \cong \Delta AFG \cong \Delta BHC \cong \Delta BHI \text{ (SAS 全等)}.$$

2. 另外也可以看到五個三角形全等，同樣地給出證明：

因為

$$\angle ACB = \angle AJB = \angle AJE = \angle BJD = \angle DJE = 90^\circ,$$

並且有

$$\angle ABC = \angle ABJ = \angle AEJ = \angle BDJ = \angle DEJ = 45^\circ \text{ 以及}$$

$$\overline{AB}=\overline{AE}=\overline{ED}=\overline{DB},$$

所以可以得到

$$\Delta ABC \cong \Delta ABJ \cong \Delta AJE \cong \Delta BEJ \cong \Delta BDJ \text{ (AAS 全等)}.$$

3. 綜合以上就可以利用拆解的方式，證明大正方形面積等於兩小正方形面積和：因為

$$\begin{aligned}\square ABDE &= \Delta ABJ + \Delta AJE + \Delta BEJ + \Delta BDJ \\ &= \Delta AGF + \Delta ACF + \Delta BCH + \Delta BIH \\ &= \square ACFG + \square BCHI,\end{aligned}$$

所以

$$\square ABDE = \square ACFG + \square BCHI,$$

此為等腰直角三角形的畢氏定理，即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

【註與心得】

1. 來源：在柏拉圖的對話錄《Plato's Dialogues》的 Meno 篇裡記載了西元前 500 年蘇格拉底(Socrates)教導一位奴隸小孩如何將一個正方形面積變成兩倍大的正方形的方法，也就是所謂的倍平方問題。當中就可以說是證明了畢氏定理中等腰直角三角形這樣的特例。收錄在 Loomis 的《勾股定理》中代數篇的編號第 098 號
2. 心得：此證明是畢氏定理的一個特例，僅證明了等腰直角三角形會有畢氏定理關係，也因此證明起來會相當容易。教學上若是在介紹一般性的畢氏定理前先講解此特例，再讓學生也有從特例推廣至一般的數學家精神，我想會是不錯的教學流程。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	

4. 補充：在數學能力指標裡，有這麼一項：

   C-R-04：能知道數學在促進人類文化發展上的具體例子。

   這個證明雖然不是處理一般性的勾股定理，但是它背後的故事是值得讓人深思的。歷史上希臘三哲學家中的柏拉圖在這個故事當中所傳達的是不論人的背景有多麼地不同，甚至在沒有受過正規教育的情況下都可以透過推理來學習證明知識的正確性。