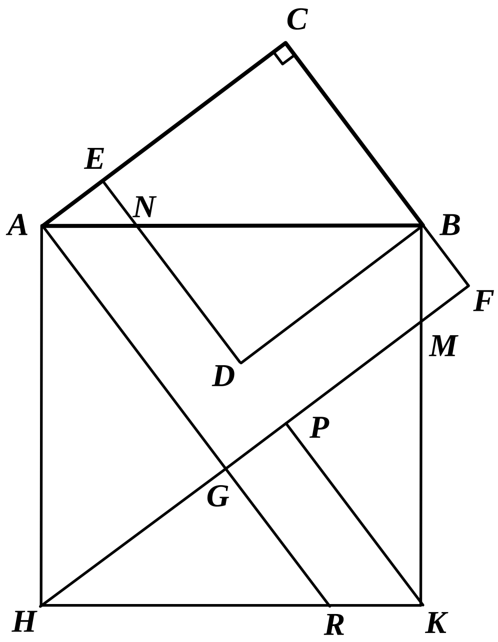
勾股定理證明-G134

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $AHKB$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向內作一正方形 $CBDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $CAGF$ 。
2. $\overline{DE}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 N 點，$\overline{BK}$ 與 $\overline{GF}$ 交於 M 點。
3. 連接 $\overline{GH}$ (由求證過程第 1 點說明 $H-G-F$ 共線)。
4. 延長 $\overline{AG}$ 與 $\overline{HK}$ 交於 R 點。
5. 從 K 點作 $\overline{BC}$ 平行線與 $\overline{GF}$ 交於 P 點。



【求證過程】

以直角三角形 ABC 的三邊分別作三個正方形，由正方形彼此之間分割的區域中，再增加三條輔助線段，由全等的三角形之間不同的切割方式，得到面積的三種表示法，最後重新組合面積，推出畢氏定理的關係式。

1. 先證明三角形 GAH 與三角形 CAB 全等，進一步得到 $H-G-F$ 共線：

因為 $\overline{GA}=\overline{CA}, \overline{AH}=\overline{AB}$ 且 $\angle GAH=90^\circ-\angle BAG=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB (\text{SAS 全等}),$$

得到 $\angle AGH=\angle ACB=90^\circ$，所以 $\angle AGH+\angle AGF=180^\circ$，因此

$$H-G-F\text{ 共線}.$$

2. 證明三角形 PHK 與三角形 CAB 全等：

   因為 $\overline{PH}\,//\,\overline{CA}$ ， $\overline{PK}\,//\,\overline{CF}$ ， $\overline{AB}\,//\,\overline{HK}$ 且 $\overline{HK}=\overline{AB}$ ，所以

   $$\Delta PHK\cong\Delta CAB\,(\text{ASA 全等}),$$

   整理得

   $$\Delta GAH\cong\Delta PHK\cong\Delta CAB.$$

3. 證明三角形 PKM 、三角形 DBN 與三角形 GHR 全等：

   因為 $\overline{PK}=\overline{DB}=\overline{GH}$ ，由平行及垂直關係得 $\angle PKM=\angle DBN=\angle GHR$ ，又

   $\angle KPM=\angle BDN=\angle HGR=90^{\circ}$ ，所以

   $$\Delta PKM\cong\Delta DBN\cong\Delta GHR\,(\text{ASA 全等}).$$

4. 證明三角形 EAN 與三角形 FBM 全等：

   因為 $\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{EC}=\overline{FC}-\overline{BC}=\overline{BF}$, $\angle EAN=90^{\circ}-\angle ABC=\angle FBM$,

   $\angle AEN=\angle BFM=90^{\circ}$ ，所以

   $$\Delta EAN\cong\Delta FBM\ (\text{ASA 全等}).$$

5. 將上述分割的區域面積以代號表示，進一步得到面積關係式：
   令四邊形 $GRKP$ 其面積為 p ；六邊形 $AGMBDN$ 其面積為 r ； ΔAHG 面積為 s ；四邊形 $CENB$ 面積為 m ， ΔEAN 與 ΔFBM 面積為 n ， ΔPKM 、 ΔDBN 與 ΔGHR 面積為 o 。因為 $\Delta CAB\cong\Delta GAH\cong\Delta PHK$ ，所以

   $$n+m=s=o+p.$$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

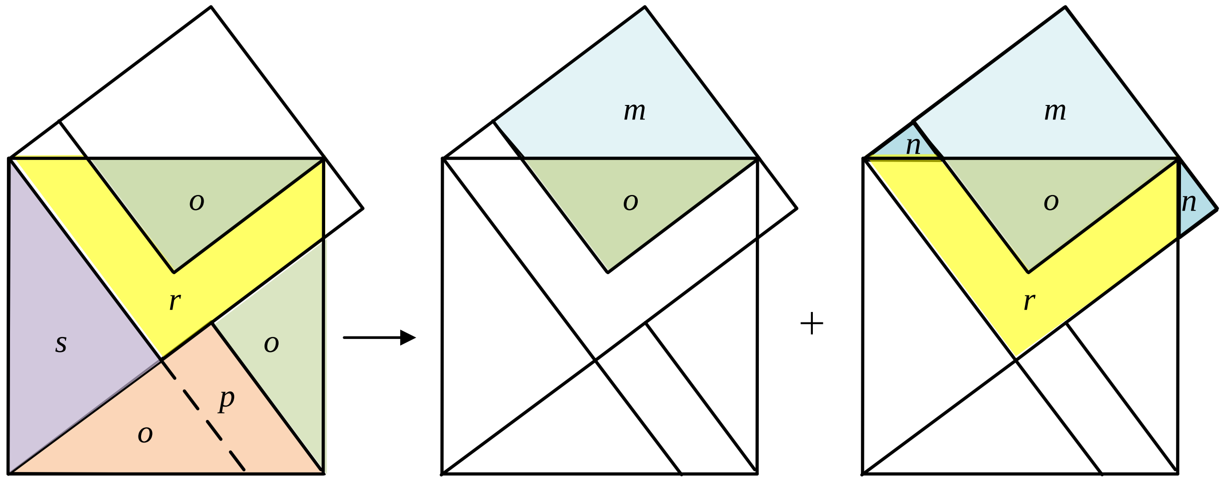
   $$\begin{aligned}\text{正方形}AHKB\text{面積}&=3o+p+r+s\\&=2o+(o+p)+r+s\\&=2o+(m+n)+r+(m+n)\\&=(m+o)+(m+o+2n+r)\\&=\text{正方形}CBDE\text{ 面積}+\text{正方形}CAGF\text{ 面積}.\end{aligned}$$

   得到

   $$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

   即

   $$c^2=a^2+b^2.$$



【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：
   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 48). Amsterdam: A. Versluys.
   E. Fourrey (1907). *Curiosités Géométriques*(p. 86). Paris: Vuibert et Nony.
2. 心得：此證明輔助線的畫法皆與三角形 *ABC* 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係，利用兩個全等的區域，作巧妙的切割方式，進而將此區域轉換成兩組區塊，方便重新拼出正方形區域。因為利用代數方法將面積重新作整理，可避免學生因為重疊的區域而造成混亂。
3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●	●	