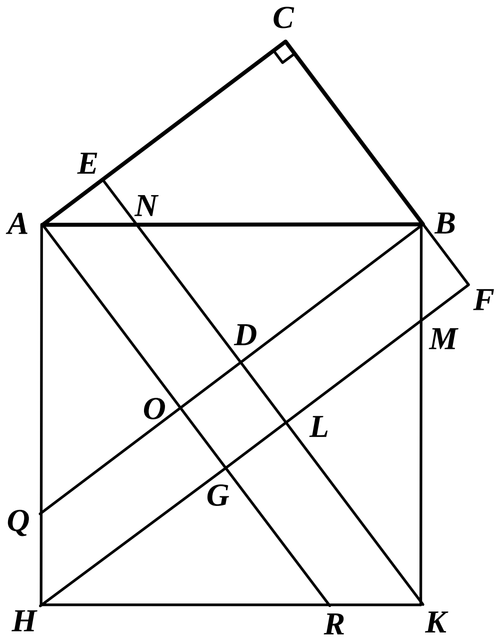
勾股定理證明-G133

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$CAGF$。
2. $\overline{DE}$與$\overline{AB}$交於N點，$\overline{BK}$與$\overline{GF}$交於M點。
3. 連接$\overline{GH}$ (由求證過程第 1 點可得$H-G-F$共線)。
4. 連接$\overline{DK}$ (由求證過程第 2 點可得$E-D-K$共線)，交$\overline{GF}$於L點。
5. 延長$\overline{AG}$與$\overline{HK}$交於R點。
6. 延長$\overline{BD}$與$\overline{AG}$交於O點，與$\overline{AH}$交於Q點。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別作三個正方形，證明正方形$AHKB$的區域，經過圖形的切割、與等面積區域轉換的過程，重新拼合出與正方形$CBDE$與正方形$CAGF$的區域，最後由面積相等推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形GAH與三角形CAB全等，進而得到$H-G-F$共線：

   因為$\overline{GA}=\overline{CA}$且$\overline{AH}=\overline{AB}$，又$\angle GAH=90^{\circ}-\angle BAG=\angle CAB$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

由此可知 $\angle AGH = \angle ACB = 90°$ ，得到 $\angle AGH + \angle AGF = 180^{\circ}$ ，因此

$$H - G - F \text{ 共線}.$$

2. 證明三角形 DKB 與三角形 CAB 全等，進而得到 $E - D - K$ 共線：

同理， $\overline{DB} = \overline{CB}$ 且 $\overline{KB} = \overline{AB}$ ，又 $\angle DBK = 90^{\circ} - \angle ABD = \angle CBA$ ，所以

$$\Delta DKB \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)}.$$

由此可知 $\angle BDK = \angle BCA = 90°$ ，得到 $\angle BDK + \angle BDE = 180^{\circ}$ ，因此

$$E - D - K \text{ 共線}.$$

3. 證明四邊形 $OQHG$ 、四邊形 $GRKL$ 、四邊形 $LMBD$ 與四邊形 $DNAO$ 互相全等：

由平行的關係 $\overline{HM} // \overline{QB} // \overline{AC}$ 且 $\overline{AR} // \overline{EK} // \overline{CF}$ ，得到對應角相等，且

$\overline{AB} = \overline{AH} = \overline{HK} = \overline{BK}$ ，因此

$$\Delta CAB \cong \Delta GAH \cong \Delta LHK \cong \Delta DKB \cong \Delta OBA \text{(ASA 全等)}.$$

得到 $\overline{GH} = \overline{LK} = \overline{DB} = \overline{OA}$ ，所以

$$\Delta GHR \cong \Delta LKM \cong \Delta DBN \cong \Delta OAQ \text{(令其面積為} o\text{)}.$$

因此

$$\text{四邊形}OQHG \cong \text{四邊形}GRKL \cong \text{四邊形}LMBD \cong \text{四邊形}DNAO \text{(令其面積為} p\text{)}.$$

4. 證明三角形 EAN 與三角形 FBM 全等：

因為 $\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CE} = \overline{CF} - \overline{CB} = \overline{BF}$, $\angle EAN = 90^{\circ} - \angle ABC = \angle FBM$,

$\angle AEN = \angle BFM = 90^{\circ}$ ，

所以

$$\Delta EAN \cong \Delta FBM \text{ (ASA 全等) (令其面積為} n\text{)}.$$

5. 找出面積關係式：

令四邊形 $DLGO$ 面積為 q ，四邊形 $CENB$ 面積為 m 。

因為 $\Delta OBA \cong \Delta CAB$ ，所以 ΔOBA 面積＝ ΔCAB 面積，得到

$$\Delta DBN \text{ 面積＋四邊形}DNAO\text{面積＝}\Delta EAN \text{ 面積＋四邊形}CENB\text{ 面積}$$

即

$$o + p = n + m.$$

又

正方形$AHKB$＝$\Delta GHR+\Delta LKM+\Delta DBN+\Delta OAQ$＋四邊形$OQHG$＋四邊形$GRKL$
＋四邊形$LMBD$＋四邊形$DNAO$＋四邊形$DLGO$
＝$4o+4p+q$
＝$2n+2m+2o+2p+q$
＝$(m+o)+(m+o+2n+2p+q)$

6. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

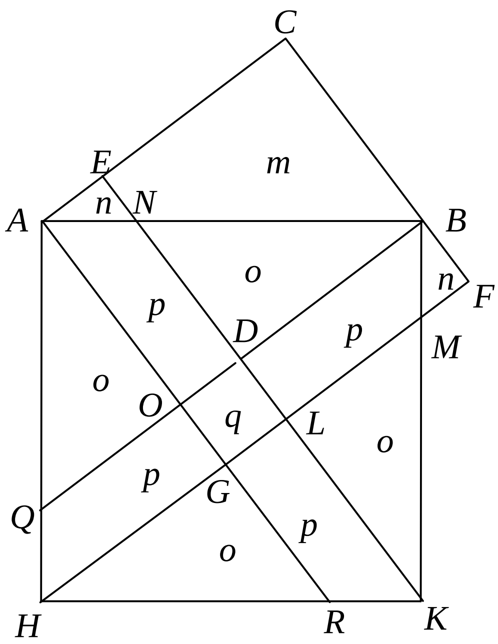
正方形$AHKB$面積＝$(m+o)+(m+o+2n+2p+q)$
＝正方形$CBDE$面積＋正方形$CAGF$面積

得到

$$\overline{AB}^2=\overline{CB}^2+\overline{CA}^2,$$

即

$$c^2=a^2+b^2.$$



【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍：

   Versluys, J. (1914). *Zes en negentig bewijzen voor het Theorema van Pythagoras (Ninety-Six Proofs of the Pythagorean Theorem)* (p. 48). Amsterdam: A. Versluys.

2. 心得：此證明輔助線的畫法皆與三角形 ABC 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係，但將大正方形 $AHKB$ 的區域切割得有些複雜，而且較小的

兩正方形區域也有重疊，因此用拼圖概念來證明並不適合，而是將區域的面積透過全等的另一組元件來轉換，重新組合拼湊出正方形 *CBDE* 與正方形 *CAGF* 的區域，巧妙運用了代數的想法來思考。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		