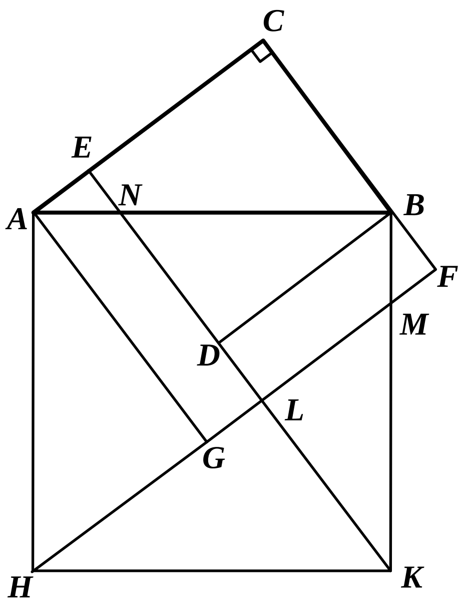
# 勾股定理證明-G132

【作輔助圖】

1. 以 $\overline{AB}$ 為邊，向外作一正方形 $AHKB$，以 $\overline{BC}$ 為邊，向內作一正方形 $CBDE$，以 $\overline{AC}$ 為邊，向內作一正方形 $CAGF$。
2. 連接 $\overline{HG}$ (由求證過程第 1 點可得 $F-G-H$ 共線)。
3. 連接 $\overline{DK}$ (由求證過程第 2 點說明 $D-E-K$ 共線)，交 $\overline{GF}$ 於 $L$ 點。
4. $\overline{AB}$ 與 $\overline{DE}$ 交於 $N$ 點，$\overline{BK}$ 與 $\overline{GF}$ 交於 $M$ 點。




【求證過程】

作圖過程將正方形 $AHKB$ 分割為六個部分，先證明正方形 $ABKH$ 內部分割的區塊中部分三角形間的全等關係，再整理得出畢氏定理關係式。

1. 先證明三角形 $GAH$ 與三角形 $CAB$ 全等，進一步得到 $F$-$G$-$H$ 共線：

因為 $\overline{GA}=\overline{CA}, \overline{AH}=\overline{AB}$ 且 $\angle GAH = 90^\circ - \angle BAG = \angle CAB$，所以

$$\Delta GAH \cong \Delta CAB (\text{SAS 全等}),$$

得到 $\angle AGH = \angle ACB = 90^\circ$，所以 $\angle AGH + \angle AGF = 180^\circ$，因此

$$F-G-H \text{ 共線，即延長 } \overline{FG} \text{ 會通過 } H \text{ 點。}$$

2. 證明三角形 $DKB$ 與三角形 $CAB$ 全等，進一步得到 $E$-$D$-$K$ 共線：

因為 $\overline{BD}=\overline{BC}, \overline{BK}=\overline{BA}, \angle DBK = 90^\circ - \angle ABD = \angle CBA$，所以

$$\Delta DKB \cong \Delta CAB \text{(SAS 全等)},$$

得到 $\angle BDK = \angle BCA = 90°$，所以 $\angle BDK + \angle BDE = 180^{\circ}$，因此

$$E - D - K \text{ 共線}.$$

3. 證明三角形 $LHK$ 與三角形 $CAB$ 全等：

因為 $\overline{HK} = \overline{AB}$，又由線段的平行關係可得到 $\angle LHK = \angle CAB, \angle LKH = \angle CBA$，

所以

$$\Delta LHK \cong \Delta CAB \text{(ASA 全等)}.$$

4. 證明三角形 $LKM$ 與三角形 $DBN$ 全等：

因為 $\overline{LK} = \overline{CB} = \overline{DB}, \angle LKM = 90^{\circ} - \angle KBD = \angle DBN, \angle KLM = \angle BDN = 90^{\circ}$，所以

$$\Delta LKM \cong \Delta DBN \text{(ASA 全等)}.$$

5. 證明三角形 $EAN$ 與三角形 $FBM$ 全等：

因為 $\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{EC} = \overline{FC} - \overline{BC} = \overline{BF}, \angle EAN = \angle FBM, \angle AEN = \angle BFM = 90^{\circ}$，

所以

$$\Delta EAN \cong \Delta FBM \text{ (ASA 全等)}.$$

6. 利用上述圖形全等的證明，將正方形 $ABKH$ 的區域分割後再做整理，最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

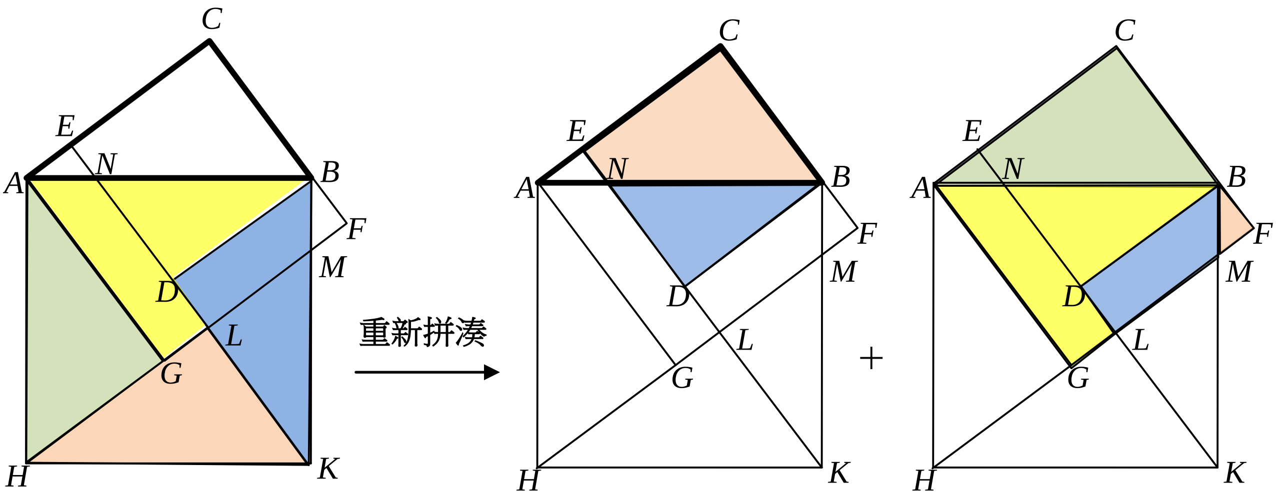
正方形 $AHKB$ 面積 ＝ $\Delta GAH$ 面積 ＋ $\Delta LHK$ 面積 ＋ $\Delta DKB$ 面積 ＋ 五邊形 $AGLDB$ 面積
＝ $\Delta CAB$ 面積 ＋ $\Delta CAB$ 面積 ＋($\Delta LKM$ 面積 ＋ 四邊形 $BDLM$ 面積)
＋ 五邊形 $AGLDB$ 面積
＝ $\Delta CAB$ 面積 ＋($\Delta EAN$ 面積 ＋ 四邊形 $ENBC$ 面積)
＋($\Delta DBN$ 面積 ＋ 四邊形 $BDLM$ 面積) ＋ 五邊形 $AGLDB$ 面積
＝(四邊形 $ENBC$ 面積 ＋ $\Delta DBN$ 面積)＋(五邊形 $AGLDB$ 面積
＋ $\Delta CAB$ 面積 ＋ $\Delta FBM$ 面積 ＋ 四邊形 $BDLM$ 面積)
＝ 正方形 $CBDE$ 面積 ＋ 正方形 $CAGF$ 面積

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$




【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍與期刊：

   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.159). New York : Macmillan and co.

   Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement, 70*, 382.

2. 心得：此證明輔助線的畫法皆與三角形 *ABC* 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係。由基本的三個正方形開始，只有作兩條分割線段，但因為有利用重複的區域進行面積的轉換，因此要特別留意圖形的組合關係，就能讓學生直觀的用拼湊的方式體會到三個正方形的面積關係。

3. 評量：

| 國中 | 高中 | 教學 | 欣賞 | 美學 |
|---|---|---|---|---|
| ● | | | ● | ● |

4. 說明：此證明的輔助圖與 G131 圖相同，面積重組的概念與 G133 類似，但證明過程因出現凹五邊形，證明審視過程會比較吃力，不如直接讓學生拼圖來感受此證明的變化。(說明圖中前後過程相同的顏色，代表面積和的相等關係)