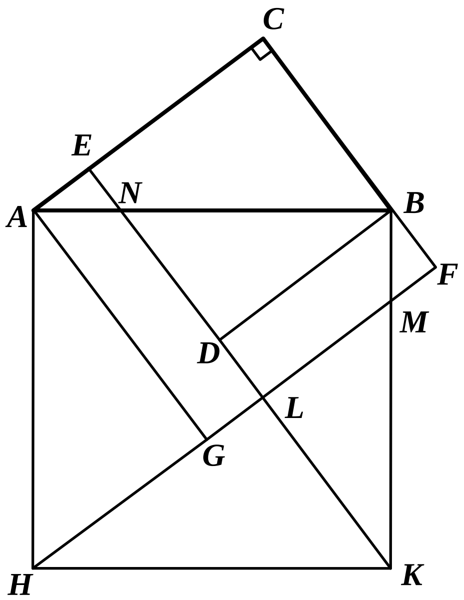
勾股定理證明-G131

【作輔助圖】

1. 以$\overline{AB}$為邊，向外作一正方形$AHKB$，以$\overline{BC}$為邊，向內作一正方形$CBDE$，以$\overline{AC}$為邊，向內作一正方形$CAGF$。
2. $\overline{DE}$與$\overline{AB}$交於N點。
3. $\overline{BK}$與$\overline{GF}$交於M點。
4. 連接$\overline{GH}$ (於求證過程第 2 點可得$H-G-F$共線)。
5. 連接$\overline{DK}$，與$\overline{GF}$交於L點 (於求證過程第 4 點可得$E-D-K$共線)。



【求證過程】

以直角三角形ABC的三邊分別作三個正方形，證明正方形$AHKB$的區域，經過圖形的切割、拼合與平移等過程，重新拼合出與正方形$CBDE$與正方形$CAGF$相等的區域，最後由面積相等推出畢氏定理的關係式。

1. 證明三角形GAH與三角形CAB全等：

   因為$\overline{GA}=\overline{CA}$且$\overline{AH}=\overline{AB}$，又$\angle GAH=90^\circ-\angle GAB=\angle CAB$，所以

   $$\Delta GAH\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等)}.$$

2. 證明$H-G-F$共線：

   由$\Delta GAH\cong\Delta CAB$證明結果可知$\angle AGH=\angle ACB=90^\circ$，所以$\angle AGH+\angle AGF=180^\circ$，

因此

$$H-G-F\text{ 共線.}$$

3. 證明三角形 DKB 與三角形 CAB 全等：

同理，$\overline{DB}=\overline{CB}$ 且 $\overline{KB}=\overline{AB}$，又 $\angle DBK=90^{\circ}-\angle ABD=\angle CBA$，所以

$$\Delta DKB\cong\Delta CAB\text{(SAS 全等).}$$

4. 證明 $E-D-K$ 共線：

由 $\Delta DKB\cong\Delta CAB$ 證明結果可知 $\angle BDK=\angle BCA=90°$，所以 $\angle BDK+\angle BDE=180^{\circ}$，

因此

$$E-D-K\text{ 共線.}$$

5. 證明三角形 LHK 與三角形 CAB 全等：

因為 $\overline{HK}=\overline{AB}$，由 $H-G-F$ 共線與 $E-D-K$ 共線的關係，得到 $\overline{HL}\,//\,\overline{AC}$ 且

$\overline{LK}\,//\,\overline{CB}$，又 $\overline{AB}\,//\,\overline{HK}$，由平行關係得到對應角相等，所以

$$\Delta LHK\cong\Delta CAB\text{(ASA 全等).}$$

6. 證明三角形 LKM 與三角形 DBN 全等：

因為 $\overline{LK}=\overline{CB}=\overline{DB}$, $\angle LKM=90^{\circ}-\angle DBK=\angle DBN$, $\angle KLM=\angle BDN=90^{\circ}$，

所以

$$\Delta LKM\cong\Delta DBN\text{(ASA 全等).}$$

7. 證明三角形 EAN 與三角形 FBM 全等：

因為 $\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{CE}=\overline{CF}-\overline{CB}=\overline{BF}$, $\angle EAN=90^{\circ}-\angle CBA=\angle FBM$,

$\angle AEN=\angle BFM=90^{\circ}$，所以

$$\Delta EAN\cong\Delta FBM\text{ (ASA 全等).}$$

8. 最後利用面積關係推出畢氏定理的關係式：

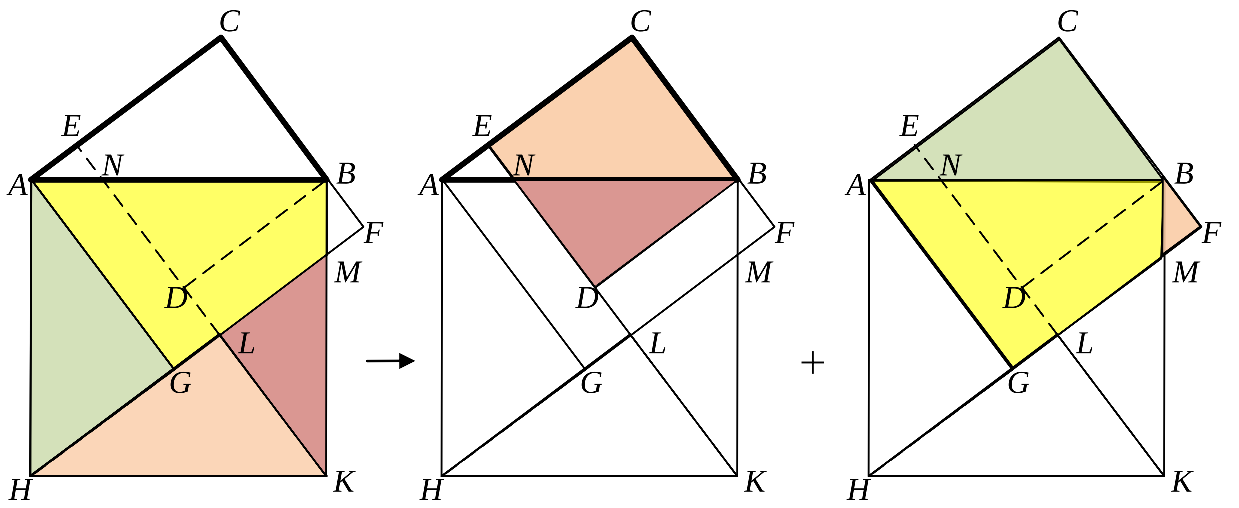
正方形$AHKB$ 面積＝四邊形$AGMB$面積＋ΔGAH 面積＋ΔLHK 面積＋ΔLKM 面積
＝四邊形$AGMB$ 面積＋ΔCAB 面積＋ΔCAB 面積＋ΔDBN 面積
＝四邊形$AGMB$ 面積＋ΔCAB 面積＋(ΔEAN 面積
＋四邊形$ENBC$ 面積)＋ΔDBN 面積
＝(四邊形$ENBC$ 面積＋ΔDBN 面積)
＋(四邊形$AGMB$ 面積＋ΔCAB 面積＋ΔFBM 面積)
＝正方形$CBDE$ 面積＋正方形$CAGF$ 面積.

得到

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2,$$

即

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



【註與心得】

1. 來源：這個證明出自於以下書籍或期刊：

   Benj. F. Yanney and James A. Calderhead(1898). New and Old Proofs of the Pythagorean. *The American Mathematical Monthly*, *5*(3), 73-74.

   Edwards, George C.(1895). *Elements of Geometry*(p.161). New York : Macmillan and co.

   Arthur R. Colburn, LL.M. (1910). The Pons Asinorum II— New solution of the Pythagorean Theorem, *Scientific American Supplement*, *70*, 359.

2. 心得：此證明的圖形與 G132 的圖相同，輔助線的畫法皆與三角形 *ABC* 的邊成平行關係，使學生較容易看出對應角的相等關係，利用圖形的全等，經過旋轉與平移的技巧拼合面積。

3. 評量：

國中	高中	教學	欣賞	美學
●		●		

4. 說明：此證明的輔助圖與 G132 圖相同，但證明過程因將三個區塊重組為凸五邊形，比 G132 出現的凹五邊形，證明審視過程比較輕鬆。(說明圖中前後過程相同的顏色，代表面積和的相等關係)